Der stochastisch getriebene harmonische Oszillator

Diplomarbeit

von

Michael Skeide

Ausgeführt am Institut für theoretische Physik

der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Heidelberg, April 1990

Meinen Eltern gewidmet, die mir meine Ausbildung ermöglicht haben.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I: Einleitung

Das Positronium, also ein leptonisches System aus einem Elektron und seinem Antiteilchen, dem Positron, hat wegen seiner Einfachheit seit der Entdeckung des Positrons schon immer besonderes Interesse auf sich gezogen. Vor allem sein Spektrum, also die Energiewerte bzw. Anregungszustände, die es annehmen kann, ist zu allen Entwicklungsphasen der Theorie Gegenstand der Berechnungen gewesen.

Dafür kam zunächst natürlich die Quantenmechanik (QM) in Frage, auf deren relativistischer Formulierung basierend, *Dirac* ja die Existenz des Positrons vorhersagte. Die heute noch genauesten Ergebnisse liefert die Quanten-Elektro-Dynamik (QED). Sie beschreibt, etwas bildlich gesprochen, die Wechselwirkung der beiden Teilchen durch Austausch weiterer Teilchen in mehr oder weniger komplizierter Form. Beschränken wir uns bei den Berechnungen auf nur ein ausgetauschtes Teilchen, ein Photon, so reproduziert die QED das Ergebnis der QM.

Eine andere Sorte von Teilchen, die Hadronen, der z.B. das Proton und das Neutron angehören, sind aus heutiger Sicht als zusammengesetzte Systeme anzusehen. Die Konstituenten, die sogenannten Quarks, gehorchen den Gesetzen der Quanten-Chromo-Dynamik (QCD). Hier können wir nun auch fragen, wie ein System, bestehend aus einem Quark und dem dazugehörigen Antiquark, genannt Quarkonium, sich verhält, und insbesondere, wie sein Spektrum aussieht.

Nun können wir wie in der QED versuchen, die Wechselwirkung durch Austausch von Teilchen zu beschreiben. Diese Vorgehensweise entspricht einer Störungstheorie, bei der die Größen nach der Stärke der Kopplung entwickelt werden. Dabei bedeutet eine größere Zahl der beteiligten Teilchen auch eine höhere Potenz der Kopplungskonstanten, mit der die einzelnen Beiträge multipliziert werden. Da die dimensionslose Kopplungskonstante kleiner als eins ist, werden die höheren Terme zusehends unterdrückt. Hier ist es nun auch wieder so, daß die Beiträge, bei denen nur ein Teilchen ausgetauscht wird, das Gluon, eine Wechselwirkung ergeben, wie sie auch im Positronium auftritt, nämlich die *Coulomb*-Wechselwirkung. Man könnte also für eine näherungsweise Berechnung einfach schauen wie sich die beiden Teilchen nach den Gesetzen der QM verhalten.

Leider ist es so, daß die Störungstheorie eine weitere Sorte von Beiträgen unberücksichtigt läßt. Die QCD ergibt nämlich, daß das physikalische Vakuum, also der Zustand geringster Energie keineswegs ein Zustand ohne Teilchen ist. Ähnlich wie in der *BCS*-Theorie der Supraleitung, in der der Grundzustand von *Cooper*-Paaren, das sind durch Phononenaustausch vermittelte Bindungszustände zweier Elektronen im Festkörper, gebildet wird, ergibt sich, daß das QCD-Vakuum aus einem Kondensat von Gluonen besteht. Mit diesem Gluon-Kondensat wechselwirken jetzt natürlich auch die Quarks.

Bei der Beschreibung unseres Quarkoniums sind wir heute weit davon entfernt, exakte Resultate angebenzukönnen. Wir sind also gezwungen, uns auf Modelle zurückzuziehen, in denen der eine oder andere Aspekt der `quantenchromodynamischen Wirklichkeit' vernachlässigt, oder doch zumindest so stark modifiziert wird, daß Berechnungen möglich werden.

In dem Modell, in dem wir versuchen, dem Problem zu Leibe zu rücken, wird als wichtigste Annahme die Wirkung des Gluon-Kondensats simuliert durch ein stochastisches Hintergrundfeld. Für dieses Feld $\vec{E}(t)$ nehmen wir weiter an, daß es eine *gaußsche* Verteilung aufweist. Das bedeutet, daß seine Verteilung durch das zweite Moment schon vollständig bestimmt ist. Fordern wir noch Rotationssymmetrie und zeitliche Translationsinvarianz, so erhalten wir die Form

1-1 $$\langle E_i(t)\, E_j(t') \rangle = \delta_{ij}\, c\, \varphi(t-t')$$

Die Kopplungskonstante ist so gewählt, daß $\varphi(0)=1$ gilt. Sie gibt an, wie stark die Quarks an das Gluon-Kondensat koppeln.

Doch selbst mit diesen starken Vereinfachungen stellt sich heraus, daß Berechnungen kaum möglich sind. Wir müssen also noch eine weitere Vereinfachung anbringen. Sie besteht darin, daß wir von der *Coulomb*-Wechselwirkung Abschied nehmen, und auf den guten alten harmonischen Oszillator zurückgreifen , also die Annahme, daß die Quarks durch eine harmonische rotationssymmetrische Kraft aneinandergebunden werden.

Um Aussagen über das Spektrum unseres Systems zu gewinnen, werden wir einen im Rahmen des Modells exakten Ausdruck für die *green*sche Funktion des Systems am Ursprung ableiten. Da unsere Annahmen insgesamt dazu führen, daß die *green*sche Funktion in drei gleichartige Faktoren für jede Raumrichtung zerfällt, genügt es uns, die *green*sche Funktion für den eindimensionalen Fall zu finden.

Die Resultate, die wir für das Spektrum erhalten, zeigen, daß wir es nicht mehr mit einem äquidistanten Spektrum, sondern mit einer Überlagerung zweier äquidistanter Spektren zu tun haben.

Für Literaturangaben sei auf die Liste in [1] verwiesen.

Kapitel II: Die Methode

Dosch und *Simonov* haben in [1] nach einer Methode, die auf *Feynman* [2] zurückgeht, den folgenden Ausdruck für die logarithmische Ableitung der *green*-schen Funktion unseres Oszillators nach der Kopplungskonstanten abgeleitet:

2-1 $$\mathcal{K}(c,\xi,\eta,T,-T) = \frac{\partial \ln G}{\partial c}(c,\xi,\eta,T,-T)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\iint\limits_{-T}^{T} d\tau\, d\sigma\, \varphi(\tau-\sigma)\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial x'}\exp\left\{-\frac{m}{2}\left(\xi\,\dot{x}(T)-\eta\,\dot{x}(-T)\right)+\frac{1}{2}\left(x\,x(\tau)+x'\,x(\sigma)\right)\right\}_{x,x'=0}}{\exp\left\{-\frac{m}{2}\left(\xi\,\dot{x}_0(T)-\eta\,\dot{x}_0(-T)\right)\right\}} .$$

Hierbei ist x(t) die stetige Lösung der "Bewegungsgleichung"

2-2 $$x\,\delta(t-\tau) + x'\,\delta(t-\sigma) = m\left(\omega^2 x(t) - \ddot{x}(t)\right) + c\int_{-T}^{T} ds\, \varphi(t-s)\, x(s)$$

zu den Randbedingungen

2-3 $$x(T) = \xi \quad , \quad x(-T) = \eta \, .$$

$x_0(t)$ ist die Lösung der homogenen Gleichung zu desselben Randbedingungen, also

2-4 $$x_0(t) = x(t)_{\varkappa,\varkappa'=0}$$

Die Zeitfunktion $x(t)$ hängt also – im Gegensatz zu $x_0(t)$ – außer von den Randbedingungen noch von den Parametern $\varkappa, \varkappa', \tau, \sigma$ ab. Definieren wir den linearen Operator $O[x](t)$ durch die rechte Seite unserer Bewegungsgleichung, und bestimmen $x_\tau(t)$ als Lösung von

2-5 $$\delta(t-\tau) = O[x_\tau](t)$$

mit den Randbedingungen

2-6 $$x_\tau(T) = x_\tau(-T) = 0 \,,$$

so können wir $x(t)$ schreiben als

2-8 $$x(t) = x_0(t) + \varkappa\, x_\tau(t) + \varkappa'\, x_\sigma(t) \,.$$

$x_0(t)$ hängt, wie bereits erwähnt nur von den Randbedingungen ab, $x_\tau(t)$ nur noch von τ, und die Abhängigkeit von $\varkappa, \varkappa'$ ist nun explizit ausgedrückt.

Wir setzen dies in (2-1) ein und erhalten für K

2-9 $$\mathcal{K}(c, \xi, \eta, T, -T) =$$
$$-\frac{1}{2}\iint_{-T}^{T} d\tau\, d\sigma\; \varphi(\tau-\sigma) \cdot \Big\{ \frac{1}{2}\big(x_\tau(\sigma) + x_\sigma(\tau)\big)$$
$$+ \Big(\frac{1}{2} x_0(\tau) - \frac{m}{2}\big(\xi\, \dot{x}_\tau(T) - \eta\, \dot{x}_\tau(-T)\big)\Big) \cdot \Big(\frac{1}{2} x_0(\sigma) - \frac{m}{2}\big(\xi\, \dot{x}_\sigma(T) - \eta\, \dot{x}_\sigma(-T)\big)\Big) \Big\}$$

Zu $(\xi,\eta)=0$ gehört natürlich $x_0(t)=0$, so daß wir unter Ausnutzung der Symmetrie von φ erhalten

2-10 $$\mathcal{K}(c,0,0,T,-T) = -\frac{1}{2}\iint_{-T}^{T} d\tau\, d\sigma\; \varphi(\tau-\sigma)\, x_\tau(\sigma) \,.$$

Führen wir noch die symmetrische bzw. antisymmetrische Lösung der homogenen Gleichung $x_+(t)$ bzw. $x_-(t)$ ein, die den Randbedingungen (1/2,1/2) bzw. (1/2,−1/2) genügt, so können wir $x_0(t)$ schreiben als

2-11 $$x_0(t) = (\xi+\eta)\, x_+(t) + (\xi-\eta)\, x_-(t) \,.$$

Damit erhalten wir für die zweifache gemischte Ableitung von K am Nullpunkt

2-12 $$\frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial\xi\,\partial\eta}(c,0,0,T,-T) = -\iint_{-T}^{T} d\tau\, d\sigma\; \varphi(\tau-\sigma)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2}\left(x_+(\tau)+x_-(\tau)\right) - \frac{m}{2}\,\dot{x}_\tau(T)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\left(x_+(\sigma)-x_-(\sigma)\right) + \frac{m}{2}\,\dot{x}_\sigma(-T)\right).$$

Das sind im Prinzip die Ausdrücke, aus denen das gerade und das ungerade Energiespektrum zu bestimmen sind. Um sie mit Leben zu füllen müssen wir also jetzt noch die Bewegungsgleichung lösen. Das soll im nächsten Kapitel geschehen.

Kapitel III: Die Lösung der Bewegungsgleichung

Unsere Aufgabe besteht darin, die Gleichung

$$\text{3-1} \quad \delta(t-\tau) = O[x](t)$$
$$= m(\omega^2 x(t) - \ddot{x}(t)) + c \int_{-T}^{T} ds\, \varphi(t-s)\, x(s)$$

mit Randbedingungen zu lösen. Es handelt sich dabei um eine lineare Integrodifferentialgleichung zweiter Ordnung. Wir dürfen also hoffen, daß ihre allgemeine Lösung sich zusammensetzt aus einer speziellen Lösung der inhomogenen, sowie Linearkombinationen zweier linear unabhängiger Lösungen der homogenen Gleichung.

Wir sind bei den Überlegungen des vergangenen Kapitels sowieso schon davon ausgegangen, daß die Lösungen der Gleichung durch die Vorgabe der Randbedingungen eindeutig bestimmt sind, und daß zu jeder Randbedingung auch eine Lösung existiert. Sollte sich dies im Laufe der weiteren Erörterungen als falsch herausstellen, so ist natürlich das ganze Verfahren in Frage gestellt. Der Frage der Eindeutigkeit werden wir gleich nachgehen, wogegen sich der Existenznachweis durch Angabe einer Lösung natürlich von selbst erledigt.

Zum Beweis der Eindeutigkeit genügt es, sich nur die homogene Gleichung

3-3 $$0 = m(\omega^2 x(t) - \ddot{x}(t)) + c \int_{-T}^{T} ds\, \varphi(t-s) x(s)$$

anzusehen. Wir beachten zunächst

3-2 $$\frac{d^2}{dt^2} \cdot \int_{-T}^{T} dt'\, \vartheta(t-t')(t-t')\, x(t') = x(t)$$

und definieren

3-4 $$\Phi(t,s) = \int_{-T}^{t} dt' \cdot (t-t')\, \varphi(t'-s)$$

Jede Lösung von (3-3) erfüllt somit folgende Integralgleichung

3-5 $$c_1 + c_2 t = x(t) - \int_{-T}^{T} ds \left\{ \vartheta(t-s)(t-s)\omega^2 + \frac{c}{m} \Phi(t,s) \right\} x(s)$$

mit durch die jeweilige Lösung bestimmten Konstanten c_1, c_2. (Die Reihenfolge der Integrationen ist wegen der Stetigkeit des Integranden auf kompaktem Integrationsbereich erlaubt.) Andererseits stellt (3-5) eine *fredholm*sche Integralgleichung zweiter Art dar, für die (s.z.B. [3]) ein Eindeutigkeitssatz existiert 1) . Demnach müssen zu verschiedenen Paaren c_1, c_2 auch verschiedene Lösungen gehören. Offensichtlich hängt die Lösungsschar linear von c_1, c_2 ab. Es kann sich dabei also nur um Linearkombinationen zweier linear unabhängiger Funktionen handeln. Da wir aber genau zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung erhalten werden, müssen diese vollständig sein.

Zur Auffindung der Lösung von (3-1) werden wir in folgenden Schritten vorgehen:

1. Wir werden die Gleichung unter Verwendung der *green*schen Funktion des normalen Oszillators (c=0) in eine *fredholm*sche Integralgleichung zweiter Art umwandeln, in deren Inhomogenität die Lösungen der homogenen Gleichung bereits

1) Wir können jedenfalls durch ein geeignet klein gewähltes c die Eindeutigkeit garantieren. Wichtig ist nur, daß in [0,c] kein Punkt des Spektrums des Integraloperators überstrichen wird, weil ja anschließend noch über dieses Intervall nach c integriert werden soll.

eingearbeitet sind. Für derartige Gleichungen existiert im Prinzip ein Lösungsverfahren (sukzessive Approximation). Wir werden aber zunächst

2. die Integralgleichung auf dem endlichen Intervall (−T, T) in *Fourier*–Reihen entwickeln und einen formalen Ausdruck für die allgemeine Lösung ableiten. 2) Diesen auszuwerten ist im Prinzip möglich und wir verfügen zu diesem Zeitpunkt sogar schon über das nötige Rüstzeug, die entstandenen Terme auszurechnen. Es erweist sich aber als einfacher,

3. nur die Struktur des formalen Ausdrucks zu analysieren, und daraus auf die Bestandteile der Lösung zu schließen. Diese werden wir dann

4. in die ursprüngliche Gleichung einsetzen, um die noch freien Koeffizienten zu bestimmen.

Beginnen wir also:

3.1 Die Integralgleichung

Wir betrachten (3−1) mit einer bestimmten Lösung x(t), bringen den Integralterm in (3−1) auf die rechte Seite und kürzen diese mit f(t) ab:

3.1−1 $$f(t) = \delta(t-\tau) - c\int_{-T}^{T} ds\, \varphi(t-s)\, x(s)$$

$$= m\left(\omega^2 x(t) - \ddot{x}(t)\right).$$

Diese Gleichung sieht formal wie die Gleichung des normalen Oszillators mit der Inhomogenität f(t) aus. Sei g(t) nun diejenige *green*sche Funktion des Oszillators, die im Unendlichen abfällt (sonst können die Existenz der im weiteren auftre−

2) Die stetigen Lösungen einer derartigen Integralgleichung sind rektifizierbar. Wir dürfen deswegen nach dem Satz von *Dirichlet* (s.[A3]) die Entwickelbarkeit annehmen.

tenden Integrale sowie die Vertauschbarkeit einiger Grenzprozesse nicht garantiert werden):

3.1-2 $$\delta(t) = m\,(\omega^2 g(t) - \ddot{g}(t)).$$

Dann kann sich

3.1-3 $$x'(t) = \int dt'\, f(t')\, g(t-t')$$

nur noch durch eine Lösung der homogenen Gleichung von x(t) unterscheiden:

3.1-4 $$x'(t) + \tilde{g}(t) = x(t)$$

wobei

3.1-5 $$0 = \omega^2 \tilde{g}(t) - \ddot{\tilde{g}}(t)$$

gelten muß. Welche spezielle Lösung der homogenen Gleichung gemeint ist, hängt von der Lösung von (3-1) ab, von der wir ausgegangen sind.

Setzen wir nun x'(t) in (3.1-3) ein, so erhalten wir

3.1-6 $$g(t-\tau) + \tilde{g}(t) = x(t) + c \int dt' \int_{-T}^{T} ds\, g(t-t')\, \varphi(t'-s)\, x(s)$$

mit der durch x(t) bestimmten Funktion $\tilde{g}(t)$.

Geben wir andererseits g(t) vor und bestimmen dazu x(t) so, daß (3.1-6) erfüllt wird, dann sehen wir, indem wir den Operator

3.1-7 $$D_H = m\,(\omega^2 - \partial_t^2)$$

auf (3.1–6) anwenden, daß automatisch auch (3–1) erfüllt ist.Für g(t) erhalten wir nach [A1]

3.1–8 $$g(t) = \frac{e^{-\omega|t|}}{2m\omega},$$

und für $\tilde{g}(t)$ kommen ersichtlich alle Linearkombinationen von sh(ωt) und ch(ωt) in Frage:

3.1–9 $$\tilde{g}(t) = \tilde{a}_+ \tilde{g}_+(t) + \tilde{a}_- \tilde{g}_-(t),$$

wobei

3.1–10 $$\tilde{g}_+(t) = \mathrm{ch}\,\omega t, \quad \tilde{g}_-(t) = \mathrm{sh}\,\omega t.$$

Wir setzen dies nun ein, ziehen erlaubterweise die t'–Integration vor und erhalten die angestrebte *fredholm*sche Integralgleichung zweiter Art:

3.1–11 $$g(t-\tau) + \tilde{a}_+ \tilde{g}_+(t) + \tilde{a}_- \tilde{g}_-(t) = x(t) - \int_{-T}^{T} ds\, \chi(t-s)\, x(s).$$

Hierbei wurde

3.1–12 $$\chi(t-s) = \frac{-c}{2m\omega} \cdot \int dt'\, e^{-\omega|t-t'|} \cdot \varphi(t'-s)$$

definiert. Daß χ nur von t–s abhängt, sieht man durch die Substitution t'= t''+ s . Daß χ außerdem noch symmetrisch ist, erhält man durch die Ersetzung t'= t + s – t''.

Bis hierher war unsere Betrachtung von der speziellen Gestalt von φ unabhängig, solange nur einige schwache Voraussetzungen wie z.B. Stetigkeit und Beschränktheit erfüllt waren. Nun aber wollen wir dafür die Form

3.1-13 $$\varphi(t) = e^{-\Omega|t|}$$

mit der Korrelationszeit

3.1-14 $$T_G = \frac{1}{\Omega}$$

annehmen. Laut [A2] erhalten wir damit für χ

3.1-15 $$\chi(t) = -\frac{c}{2m\omega}\cdot\left(e^{-\Omega|t|}\cdot\frac{2\omega}{\omega^2-\Omega^2} + e^{-\omega|t|}\cdot\frac{2\Omega}{\Omega^2-\omega^2}\right).$$

3.2 Die *Fourier*-Reihen-Entwicklung

In (3.1-11) werden die vorkommenden Funktionen im Folgenden auf das Intervall [-T, T] eingeschränkt und dort in *Fourier*-Reihen entwickelt. Die Definitionen und Eigenschaften der Fourier-Reihen, wie wir sie hier verwenden werden, sowie ein wichtiger Satz, der sich mit der Darstellbarkeit bestimmter Funktionenklassen durch *Fourier*-Reihen befaßt, sind in [A3] zitiert. Damit schreibt sich (3.1-11) nunmehr

3.2-1 $$g_m(\tau) + \tilde{a}_+\tilde{g}_{+m} + \tilde{a}_-\tilde{g}_{-m} = x_m - \sum_l \chi_{ml}\, x_l$$

oder kurz

3.2-2 $$g(\tau) + \tilde{a}_+\tilde{g}_+ + \tilde{a}_-\tilde{g}_- = x - \chi x.$$

Für die formale Lösung dieser Gleichung bezeichnen wir die Inhomogenität kurz als f bzw. f_n und lösen die Gleichung nach x auf:

3.2-5 $$x = f + \chi^x$$

Die sukzessive Approximation besteht nun darin, eine Folge von Näherungslösungen zu konstruieren, von der wir annehmen, daß sie gegen die gesuchte Lösung konvergiert. Wir beginnen mit

3.2-3 $$x_0 = f .$$

Die (n+1)-te Iteration gewinnen wir, indem wir die n-te in die rechte Seite von (3.2-5) einsetzen:

3.2-4 $$x_{n+1} = f + \chi^{x_n} .$$

Damit ist unmittelbar ersichtlich, daß wir im Konvergenzfall eine Lösung erhalten.

Wie wir durch fortwährendes Einsetzen leicht sehen, läßt sich die n-te Iteration schreiben als

3.2-6 $$x_n = \sum_{i=0}^{n} \chi^i f .$$

Unser Verfahren konvergiert also auf alle Fälle dann, wenn die geometrische Reihe von χ (operatornormkonvergent) existiert. Als Integraloperator mit beschränktem Kern ist χ stetig, besitzt also eine endliche Norm. Diese wird auf alle Fälle kleiner als eins, wenn wir nur c klein genug wählen (vrgl. auch FN S.8). Wir erhalten also mit

3.2-7 $$X = \sum_{n=0}^{\infty} \chi^n$$

die Lösung von (3.2-5)

3.2-8 $$x = \chi f .$$

Nun gilt es also χ zu bestimmen. Dazu benötigen wir zunächst die *Fourier*-Darstellung von χ. Nach [A4] ist sie mit den Ersetzungen

3.2-9 $$\alpha = \frac{\omega T}{\pi} \quad , \quad \beta = \frac{\Omega T}{\pi}$$

gegeben durch

3.2-10 $$\chi_{\ell m} = \frac{c}{m}\left(\frac{T}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{2\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \cdot \Bigg[\left(\frac{1}{\beta^2+\ell^2} - \frac{1}{\alpha^2+\ell^2} \right) \delta_{\ell m}$$

$$- (-1)^{\ell+m} \left(\frac{1-e^{-2\beta\pi}}{2\beta\pi} \cdot \frac{\beta^2 - \ell m}{(\beta^2+\ell^2)(\beta^2+m^2)} - \frac{1-e^{-2\alpha\pi}}{2\alpha\pi} \cdot \frac{\alpha^2 - \ell m}{(\alpha^2+\ell^2)(\alpha^2+m^2)} \right) \Bigg]$$

Dieser Operator läßt nun bei näherer Betrachtung eine interessante Struktur erkennen. Er ist nämlich die Summe aus einem diagonalen Anteil D, einem bezüglich Vertauschungen der Vorzeichen in den Indizes symmetrischen Anteil S und einem diesbezüglich antisymmetrischen A, also

3.2-11 $$\chi = D + S + A ,$$

wobei

3.2-12 $$D_{\ell m} = D_\ell \, \delta_{\ell m} \quad , \quad D_\ell = D_{-\ell} \, ,$$

$$S_{\ell m} = S_{\ell -m} = S_{-\ell m} = S_{-\ell -m} \, ,$$

$$A_{\ell m} = -A_{\ell -m} = -A_{-\ell m} = A_{-\ell -m}$$

gilt. Beachten wir nun, daß symmetrische Operatoren multipliziert mit antisymmetrischen null ergeben, sowie daß die Multiplikation eines beliebigen Operators mit unserem D dessen Symmetrie- oder Antisymmetriecharakter nicht verändert, so folgt, daß bei Ausmultiplizieren des Beitrags χ^n alle Terme null werden, die sowohl S wie auch A als Faktor enthalten. Damit zeigen wir durch vollständige Induktion:

3.2-13 $$\chi^n = (D+S)^n + (D+A)^n - D^n$$

Für n=0 ist die Aussage richtig. Sei sie nun für n als richtig angenommen. Damit erhalten wir

3.2-14 $$\begin{aligned} \chi^{n+1} = \chi^n \chi = {} & (D+S)^n D + (D+A)^n D - D^{n+1} \\ & + (D+S)^n S + (D+A)^n S - D^n S \\ & + (D+S)^n A + (D+A)^n A - D^n A \end{aligned}$$

Der fünfte und der sechste, sowie der siebte und der neunte Term heben sich aufgrund der vorangegangenen Erläuterungen gerade weg. Die noch verbleibenden Terme liefern dann gerade die gewünschte Aussage für n+1.

Wir können χ also schreiben als

3.2-15 $$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} (D+S)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (D+A)^n - \sum_{n=0}^{\infty} D^n$$

Hierbei tritt zweimal die geometrische Reihe einer Summe von zwei Operatoren D und M (mit M=S bzw. M=A) auf. Multiplizieren wir die Potenzen aus, so sehen wir, daß die Summe über genau alle Terme des Aussehens

3.2-16 $$D^{i_0} M D^{i_1} M D^{i_2} M \cdots M D^{i_{k-1}} M D^{i_k}$$

mit $k, i_0, \ldots, i_k \in \mathbb{N}_0$ geht. Könnten wir also beliebig umordnen, so lautete mit der Abkürzung

3.2-17 $$\mathcal{D} = \sum_{n=0}^{\infty} D^n$$

das Ergebnis

3.2-18 $$\sum_{n=0}^{\infty} (D+M)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0,\ldots,i_k=0}^{\infty} D^{i_0} M D^{i_1} M \cdots M D^{i_k} = \mathcal{D} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (M\mathcal{D})^k .$$

Dies ist nach dem Satz in [A5] in der Tat richtig, wenn die Summe der Normen der beiden Operatoren kleiner als eins ist. Auch das ist wieder nur eine erfüllbare Forderung an die Kleinheit von c. Wir erhalten somit

3.2-19 $$\mathcal{X} = \mathcal{D} + \mathcal{D} \sum_{k=1}^{\infty} (S\mathcal{D})^k + \mathcal{D} \sum_{k=1}^{\infty} (A\mathcal{D})^k .$$

Betrachten wir uns nun S bzw. A noch genauer, so erkennen wir, daß sich beide in der Form

3.2-20 $$M_{lm} = \sum_{i=1}^{2} M^i_l M^i_m$$

oder kurz

3.2-21 $$M = \sum_{i=1}^{2} M^i)(M^i$$

als Summe über zwei dyadische Produkte schreiben lassen. Aus den hinteren beiden Termen in (3.2-19) werden damit Ausdrücke der Form

3.2-22 $$\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}(M\mathcal{D})^k\right]_{lm} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{2} (\mathcal{D}M^{i_1})_l\,(M^{i_1}\mathcal{D}M^{i_2}) \dots$$

$$\dots (M^{i_{k-1}}\mathcal{D}M^{i_k})(M^{i_k}\mathcal{D})_m$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} (\mathcal{D}M^i)_l \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{M}^k)^{ij}\right] (M^j\mathcal{D})_m$$

oder kurz

3.2-23 $$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}(M\mathcal{D})^k = \sum_{i,j=1}^{2} \mathcal{D}M^i)\left[\sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{M}^k)^{ij}\right](M^j\mathcal{D}$$

Hierbei ist mit $\mathcal{M}$ die 2x2-Matrix

3.2-24 $$\mathcal{M}^{ij} = (M^i\mathcal{D}M^j) = \sum_{l,m} M^i_l\,\mathcal{D}_{lm}\,M^j_m$$

gemeint. Damit erhalten wir

3.2-25 $$X = \mathcal{D} + \sum_{i,j=1}^{2} \mathcal{D}S^i)\left[\sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{S}^k)^{ij}\right](S^j\mathcal{D}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} \mathcal{D}A^i\left[\sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{A}^k)^{ij}\right](A^j\mathcal{D} .$$

Um jetzt die Lösung von (3.2-5) zu erhalten, müssen wir den Operator auf f_m anwenden. Um aus den *Fourier*-Koeffizienten der Lösung die Zeitabhängigkeit zu gewinnen, müssen wir sie mit $e^{il\pi t/T}$ überschieben:

3.2-26
$$x(t) = (e\mathcal{D}f)(t) + \sum_{i,j=1}^{2} (e\mathcal{D}S^i)\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{S}^k)^{ij}\right](S^j\mathcal{D}f) + \sum_{i,j=1}^{2}(e\mathcal{D}A^i)\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{A}^k)^{ij}\right](A^j\mathcal{D}f).$$

Hierbei bedeuten

3.2-27
$$(e\mathcal{D}M^i)(t) = \sum_{l,m} e^{il\pi\frac{t}{T}}\mathcal{D}_{lm}M^i_m,$$
$$(M^i\mathcal{D}f)l = \sum_{l,m} M^i_l \mathcal{D}_{lm} f_m.$$

Nun müssen wir natürlich D, S^i und A^i in (3.2-10) identifizieren. Wir entnehmen:

3.2-28
$$\mathcal{D}_l = -\frac{2\beta c}{m}\cdot\left(\frac{T}{\pi}\right)^3\cdot\frac{1}{(\alpha^2+l^2)(\beta^2+l^2)},$$
$$S^1_l = \sqrt{C\,v(\alpha)}\cdot\frac{(-1)^l\alpha}{\alpha^2+l^2},$$
$$S^2_l = i\sqrt{C\,v(\beta)}\cdot\frac{(-1)^l\beta}{\beta^2+l^2},$$

$$A_l^1 = i\sqrt{G\,v(\alpha)} \cdot \frac{(-1)^l\, l}{\alpha^2 + l^2} ,$$

$$A_l^2 = \sqrt{G\,v(\beta)} \cdot \frac{(-1)^l\, l}{\beta^2 + l^2} ,$$

mit den Abkürzungen

3.2-29 $$G = \frac{2\beta c}{m} \cdot \left(\frac{T}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$v(\alpha) = \frac{1 - e^{-2\pi\alpha}}{2\pi\alpha}$$

3.3 Der Lösungs Ansatz

Zur weiteren Analyse der Lösungsstruktur benötigen wir jetzt das Aussehen der Inhomogenität. Nach [A4] läßt sie sich mit neuen Koeffizienten a_{+-} umschreiben als

3.3-1 $$g(\tau) + \tilde{a}_+ \tilde{g}_+ + \tilde{a}_- \tilde{g}_- = g_0(\tau) + a_+ g_+ + a_- g_-$$

mit

3.3-2 $$g_{0m}(\tau) = \frac{T}{2m\pi^2} \cdot \frac{e^{-im\pi\frac{\tau}{T}}}{\alpha^2 + m^2} ,$$

$$g_{+m} = S_m^1 \quad , \quad g_{-m} = A_m^1 .$$

Setzen wir dies in (3.2–26) ein, so erhalten wir zunächsteinmal einen Beitrag

3.3–3 $$(e\mathcal{D}\, g_0(\tau))(t).$$

Alle anderen Beiträge sind Linearkombinationen der $(e\mathcal{D}M^1)(t)$. Da aber diese nach [A6] ihrerseits wieder Linearkombinationen von

3.3–4 $$\operatorname{sh} \nu_\pm t \; , \; \operatorname{ch} \nu_\pm t \; ,$$

mit

3.3–5 $$\nu_\pm = \sqrt{\frac{1}{2}(\Omega^2 + \omega^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\Omega^2 - \omega^2)^2 - \frac{2\Omega c}{m}}}$$

sind, können wir für x(t) ansetzen

3.3–6 $$x(t) = (e\mathcal{D}\, g_0(\tau))(t) + \tilde{\lambda}_+ \operatorname{ch} \nu_+ t + \tilde{\lambda}_- \operatorname{ch} \nu_- t + \tilde{\mu}_+ \operatorname{sh} \nu_+ t + \tilde{\mu}_- \operatorname{sh} \nu_- t .$$

Für (3.3–3) finden in [A6]:

3.3–7 $$(e\mathcal{D}\, g_0(\tau))(t) = -\frac{\Omega c}{m^2} \cdot \frac{1}{\nu_+^2 - \nu_-^2} \cdot \left[\frac{1}{\nu_+^2 - \omega^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu_+ (T - |t - \tau|)}{\nu_+ \operatorname{sh} \nu_+ T} - \frac{1}{\nu_-^2 - \omega^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \nu_- (T - |t - \tau|)}{\nu_- \operatorname{sh} \nu_- T} \right] .$$

3.4 Die Bestimmung der Koeffizienten

Um die Koeffizienten in (3.3-6) zu bestimmen, müssen wir sie jetzt in (3-1) einsetzen. Betrachten wir zunächst den Anteil, der zu dem Differentialoperator $D_H = m(\omega^2 - \partial_t^2)$ gehört. Bei den simplen Cosinus und Sinus hyperbolikus reproduzieren sich die Funktionen bis auf einen Faktor selber:

3.4-1 $$D_H \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, v_\pm t \\ \mathrm{sh}\, v_\pm t \end{pmatrix} = -m\,(v_\pm^2 - \omega^2) \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, v_\pm t \\ \mathrm{sh}\, v_\pm t \end{pmatrix} .$$

Bei den in $(e\mathcal{D}g_0(\tau))(t)$ vorkommenden gestückelten Funktionen ist dies nicht anders. Es kommen aber nach [A1] noch Beiträge mit δ-Funktionen dazu:

3.4-2 $$D_H\, \mathrm{ch}\, v_\pm(T - |t-\tau|) = -m(v_\pm^2 - \omega^2)\, \mathrm{ch}\, v_\pm(T - |t-\tau|) + 2m v_\pm\, \mathrm{sh}\, v_\pm T\, \delta(t-\tau) .$$

Unter Verwendung von

3.4-3 $$(v_+^2 - \omega^2)(v_-^2 - \omega^2) = \frac{2\Omega c}{m}$$

finden wir

3.4-4 $$D_H\, x(t) = \delta(t-\tau) + \frac{\Omega c}{m} \cdot \frac{1}{v_+^2 - v_-^2} \cdot \left[\frac{\mathrm{ch}\, v_+(T-|t-\tau|)}{v_+\, \mathrm{sh}\, v_+ T} - \frac{\mathrm{ch}\, v_-(T-|t-\tau|)}{v_-\, \mathrm{sh}\, v_- T} \right]$$
$$- m \left[(v_+^2 - \omega^2)\, \tilde\lambda_+\, \mathrm{ch}\, v_+ t + (v_-^2 - \omega^2)\, \tilde\lambda_-\, \mathrm{ch}\, v_- t \right.$$
$$+ \ldots$$

$$\ldots + (\nu_+^2 - \omega^2)\,\tilde{\mu}_+\, \mathrm{sh}\, \nu_+ t + (\nu_-^2 - \omega^2)\,\tilde{\mu}_-\, \mathrm{sh}\, \nu_- t \Big] .$$

Nun ist noch der Integralanteil

3.4-5 $$c \int_{-T}^{T} ds\; \varphi(t-s)\, x(s)$$

zu bestimmen. Es handelt sich dabei um elementare Integrale über Exponentialfunktionen mit zerstückeltem Integrationsbereich, die in [A7] ausgeführt sind. Für die Cosinus hyperbolicus-Funktionen in (3.3-7) erhalten wir damit die Beiträge

3.4-6 $$c \int_{-T}^{T} ds\; \varphi(t-s)\, \mathrm{ch}\, \nu_\pm (T - |t-\tau|) = \frac{2c}{\nu_\pm^2 - \Omega^2} \Big[-\Omega\, \mathrm{ch}\, \nu_\pm (T - |t-\tau|) + e^{-\Omega|t-\tau|} \cdot \nu_\pm \cdot \mathrm{sh}\, \nu_\pm T + e^{-\Omega T} (\Omega\, \mathrm{ch}\, \nu_\pm \tau\, \mathrm{ch}\, \Omega t - \nu_\pm\, \mathrm{sh}\, \nu_\pm \tau\, \mathrm{sh}\, \Omega t) \Big] .$$

Sie enthalten drei grundverschiedene Summanden. Die Ersten müssen sich mit den entsprechenden Ausdrücken in (3.4-4) wegheben. Unter Verwendung von

3.4-7 $$(\nu_\pm^2 - \omega^2) = -(\nu_\mp^2 - \Omega^2)$$

und (3.4-3) finden wir dies auch bestätigt.

Die Zweiten haben kein Pendant in (3.4-4). Sie müssen sich gegenseitig wegheben. Auch dies erweist sich als richtig.

Die von $(e\mathcal{J} g_0(\tau))(t)$ noch verbleibenden Terme ergeben, $\mathrm{ch}(\Omega t)$ und $\mathrm{sh}(\Omega t)$ sortiert

3.4-8 $$\frac{c}{m} \cdot \frac{e^{-\Omega T}}{\nu_+^2 - \nu_-^2} \cdot \Big[\Omega\, \mathrm{ch}\, \Omega t \left(\frac{\mathrm{ch}\, \nu_+ \tau}{\nu_+\, \mathrm{sh}\, \nu_+ T} - \frac{\mathrm{ch}\, \nu_- \tau}{\nu_-\, \mathrm{sh}\, \nu_- T} \right) - \mathrm{sh}\, \Omega t \left(\frac{\mathrm{sh}\, \nu_+ \tau}{\mathrm{sh}\, \nu_+ T} - \frac{\mathrm{sh}\, \nu_- \tau}{\mathrm{sh}\, \nu_- T} \right) \Big] .$$

Bei den verbleibenden hyperbolischen Funktionen heben sich unabhängig von $\tilde{\lambda}_\pm$ oder $\tilde{\mu}_\pm$ die in (3.4-1) auftretenden Beiträge gegen die jeweils ersten Terme in (A7-*) weg. Die verbleibenden sind

3.4-9 $$2c\, e^{-\Omega T} \cdot \left[ch\,\Omega t \left(\tilde{\lambda}_+ \frac{\Omega\, ch\, v_+T + v_+ sh\, v_+T}{v_+^2 - \Omega^2} + \tilde{\lambda}_- \frac{\Omega\, ch\, v_-T + v_- sh\, v_-T}{v_-^2 - \Omega^2} \right) + sh\,\Omega t \left(\tilde{\mu}_+ \frac{\Omega\, sh\, v_+T + v_+ ch\, v_+T}{v_+^2 - \Omega^2} + \tilde{\mu}_- \frac{\Omega\, sh\, v_-T + v_- ch\, v_-T}{v_-^2 - \Omega^2} \right) \right].$$

Damit nun unsere Gleichung erfüllt ist muß die Summe von (3.4-8) und (3.4-9) verschwinden. Führen wir folgende Abkürzungen ein

3.4-10 $$l_\pm = \frac{ch\, v_\pm \tau}{v_\pm\, sh\, v_\pm T}, \quad m_\pm = \frac{sh\, v_\pm \tau}{\Omega\, sh\, v_\pm T},$$

3.4-11 $$\Lambda_\pm = \Omega + v_\pm\, th\, v_\pm T, \quad M_\pm = \Omega + v_\pm\, cth\, v_\pm T,$$

und

3.4-12 $$\lambda_\pm = \tilde{\lambda}_\pm \cdot \frac{ch\, v_\pm T \cdot \Lambda_\pm}{v_\pm^2 - \Omega^2}, \quad \mu_\pm = \tilde{\mu}_\pm \cdot \frac{sh\, v_\pm T\, M_\pm}{v_\pm^2 - \Omega^2},$$

so ergeben sich daraus, weil ch(Ωt) und sh(Ωt) linear unabhängig sind, die zwei Gleichungen

3.4-13 $$\lambda_+ + \lambda_- = -\frac{\Omega}{2m} \cdot \frac{1}{v_+^2 - v_-^2} (l_+ - l_-) = \lambda_s$$

$$\mu_+ + \mu_- = \frac{\Omega}{2m} \cdot \frac{1}{\nu_+^2 - \nu_-^2} (m_+ - m_-) = \mu_s .$$

Wir befriedigen sie allgemein durch den Ansatz

3.4–14 $$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\lambda_s \pm \lambda \quad , \quad \mu_\pm = \frac{1}{2}\mu_s \pm \mu$$

mit noch freien λ und μ. Wir erhalten somit die allgemeine Lösung unserer Gleichung (3–1) 3)

3.4–15 $$\begin{aligned} x(t) = {} & (e\mathcal{D}g_0(\tau))(t) \\ & + \frac{1}{2}\lambda_s \left(\operatorname{ch}\nu_+ t \cdot \frac{\nu_+^2 - \Omega^2}{\operatorname{ch}\nu_+ T \cdot \Lambda_+} + \operatorname{ch}\nu_- t \, \frac{\nu_-^2 - \Omega^2}{\operatorname{ch}\nu_- T \cdot \Lambda_-} \right) \\ & + \frac{1}{2}\mu_s \left(\operatorname{sh}\nu_+ t \cdot \frac{\nu_+^2 - \Omega^2}{\operatorname{sh}\nu_+ T \cdot M_+} + \operatorname{sh}\nu_- t \cdot \frac{\nu_-^2 - \Omega^2}{\operatorname{sh}\nu_- T \cdot M_-} \right) \\ & + \lambda \left(\operatorname{ch}\nu_+ t \, \frac{\nu_+^2 - \Omega^2}{\operatorname{ch}\nu_+ T \cdot \Lambda_+} - \operatorname{ch}\nu_- t \, \frac{\nu_-^2 - \Omega^2}{\operatorname{ch}\nu_- T \cdot \Lambda_-} \right) \\ & + \mu \left(\operatorname{sh}\nu_+ t \, \frac{\nu_+^2 - \Omega^2}{\operatorname{sh}\nu_+ T \cdot M_+} - \operatorname{sh}\nu_- t \, \frac{\nu_-^2 - \Omega^2}{\operatorname{sh}\nu_- T \cdot M_-} \right) . \end{aligned}$$

Als nächstes werden wir, um $x_\gamma(t)$ zu erhalten, die Parameter so bestimmen, daß die Funktion an den Intervallenden verschwindet. Dazu müssen die symmetri–

3) Diese Lösung ist, auch wenn wir ihre Struktur nur auf [–T, T] ergründet hatten, wie unsere Rechnungen zu Punkt 4. zeigten, eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$.

schen und antisymmetrischen Anteile jeder für sich verschwinden. Der Beitrag von $(e\mathcal{D}g_0(\tau))$ ist symmetrisch:

3.4-16 $$(e\mathcal{D}g_0(\tau))(\pm T) = -\frac{\Omega c}{m^2}\cdot\frac{1}{V_+^2-V_-^2}\cdot\left[\frac{l_+}{V_+^2-\omega^2}-\frac{l_-}{V_-^2-\omega^2}\right].$$

Das ergibt

3.4-17 $$\lambda = -\frac{(e\mathcal{D}g_0(\tau))(T)+\frac{1}{2}\lambda_s\left(\frac{V_+^2-\Omega^2}{\Lambda_+}+\frac{V_-^2-\Omega^2}{\Lambda_-}\right)}{\frac{V_+^2-\Omega^2}{\Lambda_+}-\frac{V_-^2-\Omega^2}{\Lambda_-}}$$

und

3.4-18 $$\mu = -\frac{1}{2}\mu_s\cdot\frac{\frac{V_+^2-\Omega^2}{M_+}+\frac{V_-^2-\Omega^2}{M_-}}{\frac{V_+^2-\Omega^2}{M_+}-\frac{V_-^2-\Omega^2}{M_-}}.$$

Unter Beachtung der Beziehungen

3.4-19 $$1-\frac{x+y}{x-y}=-2\frac{y}{x-y}\quad,\quad 1+\frac{x+y}{x-y}=2\frac{x}{x-y}$$

finden wir damit

3.4-20 $$\tilde{\lambda}_\pm = \mp\frac{\lambda_s\frac{2\Omega c}{m}\cdot\frac{1}{\Lambda_+\Lambda_-\operatorname{ch}V_\pm T}+\frac{V_\pm^2-\Omega^2}{\Lambda_\pm\operatorname{ch}V_\pm T}(e\mathcal{D}g_0(\tau))(T)}{\frac{V_+^2-\Omega^2}{\Lambda_+}-\frac{V_-^2-\Omega^2}{\Lambda_-}},$$

$$\tilde{\mu}_\pm = \mp\frac{\mu_s\frac{2\Omega c}{m}\cdot\frac{1}{M_+M_-\operatorname{sh}V_\pm T}}{\frac{V_+^2-\Omega^2}{M_+}-\frac{V_-^2-\Omega^2}{M_-}}$$

bzw. mit den Abkürzungen

3.4-11.a $\Lambda = \Lambda_-(\nu_+^2-\Omega^2) - \Lambda_+(\nu_-^2-\Omega^2)$, $M = M_-(\nu_+^2-\Omega^2) - M_+(\nu_-^2-\Omega^2)$,

3.4-21 $$\tilde{\lambda}_\pm = \mp \frac{1}{\Lambda \,\mathrm{ch}\,\nu_\pm T} \cdot \left(\frac{2\Omega c}{m} \lambda_s + \Lambda_\mp (\nu_\pm^2 - \Omega^2)(e\mathcal{D} g_0(\tau))(T) \right),$$

$$\tilde{\mu}_\pm = \mp \frac{1}{M \,\mathrm{sh}\,\nu_\pm T} \cdot \frac{2\Omega c}{m} \mu_s .$$

Betrachten wir nun wieder (3.4-15), so können wir feststellen, daß die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (3-3) durch den Teil von (3.4-15) gegeben ist, der nur von λ und μ abhängt. Wir erhalten des halb für die normierten Lösungen $x_{+-}(t)$

3.4-22 $$x_+(t) = \frac{1}{2\Lambda} \cdot \left(\frac{\mathrm{ch}\,\nu_+ t}{\mathrm{ch}\,\nu_+ T} \Lambda_-(\nu_+^2-\Omega^2) - \frac{\mathrm{ch}\,\nu_- t}{\mathrm{ch}\,\nu_- T} \Lambda_+(\nu_-^2-\Omega^2) \right),$$

$$x_-(t) = \frac{1}{2M} \cdot \left(\frac{\mathrm{sh}\,\nu_+ t}{\mathrm{sh}\,\nu_+ T} \cdot M_-(\nu_+^2-\Omega^2) - \frac{\mathrm{sh}\,\nu_- t}{\mathrm{sh}\,\nu_- T} M_+(\nu_-^2-\Omega^2) \right).$$

Kapitel IV: Die logarithmische Ableitung am Ursprung

Wir wollen nun K(c,0,0,T,−T) nach (2−10) ausrechnen. Dazu befassen wir uns zunächst mit

$$4-1 \qquad \int_{-T}^{T} ds \, \varphi(\tau - s) \, X_\tau(s) \, .$$

Die benötigten Integrale haben wir im Prinzip schon im vergangenen Kapitel ausgerechnet (3.4−5)−(3.4−9). (In den Termen ist noch t durch τ zu ersetzen, und sie sind insgesamt noch durch c zu dividieren.) Hierbei ist es nun so, daß sich die Beiträge nach (3.4−8) und (3.4−9) wegheben − die Koeffizienten wurden ja gerade danach bestimmt. Dafür tragen aber jetzt die Anteile bei, die dort noch durch den Differentialoperator kompensiert wurden. Wir erhalten demnach das Negative von (4−1), indem wir bei (3.4−4) die δ-Funktion weglassen, durch c dividieren, und t durch τ ersetzen:

$$4-2 \qquad \int_{-T}^{T} ds \, \varphi(\tau - s) \, X_\tau(s) = -\frac{\Omega}{m} \cdot \frac{1}{v_+^2 - v_-^2} \left[\frac{1}{v_+} \operatorname{cth} v_+ T - \frac{1}{v_-} \operatorname{cth} v_- T \right]$$

$$+ \frac{m}{c} \left[(v_+^2 - \omega^2) \tilde{\lambda}_+ \operatorname{ch} v_+ \tau + (v_-^2 - \omega^2) \tilde{\lambda}_- \operatorname{ch} v_- \tau + (v_+^2 - \omega^2) \tilde{\mu}_+ \operatorname{sh} v_+ \tau + (v_-^2 - \omega^2) \tilde{\mu}_- \operatorname{sh} v_- \tau \right] .$$

Für (2−10) erhalten wir damit

$$4-3 \qquad \mathcal{K}(c,0,0,T,-T) = \int_{-T}^{T} d\tau \left\{ \frac{\Omega}{2m} \cdot \frac{1}{v_+^2 - v_-^2} \left[\frac{1}{v_+} \operatorname{cth} v_+ T - \frac{1}{v_-} \operatorname{cth} v_- T \right] \ldots \right.$$

$$-\Omega\frac{(e\mathcal{D}y_0(\tau))(T)}{\Lambda}\left[\Lambda_-\frac{\operatorname{ch}\nu_+\tau}{\operatorname{ch}\nu_+T}-\Lambda_+\frac{\operatorname{ch}\nu_-\tau}{\operatorname{ch}\nu_-T}\right]$$

$$+\frac{\Omega\lambda_s}{\Lambda}\left[(\nu_+^2-\omega^2)\frac{\operatorname{ch}\nu_+\tau}{\operatorname{ch}\nu_+T}-(\nu_-^2-\omega^2)\frac{\operatorname{ch}\nu_-\tau}{\operatorname{ch}\nu_-T}\right]+\frac{\Omega\mu_s}{M}\left[(\nu_+^2-\omega^2)\frac{\operatorname{sh}\nu_+\tau}{\operatorname{sh}\nu_+T}-(\nu_-^2-\omega^2)\frac{\operatorname{sh}\nu_-\tau}{\operatorname{sh}\nu_-T}\right]\Bigg\}$$

$$=\int_{-T}^{T}d\tau\Bigg\{\frac{\Omega}{2m}\cdot\frac{1}{\nu_+^2-\nu_-^2}\left[\frac{1}{\nu_+}\operatorname{cth}\nu_+T-\frac{1}{\nu_-}\operatorname{cth}\nu_-T\right]$$

$$+\frac{\Omega^2c}{m^2\Lambda}\cdot\frac{1}{\nu_+^2-\nu_-^2}\cdot\Bigg[\frac{\Lambda_-}{\nu_+^2-\omega^2}\cdot\frac{\operatorname{ch}^2\nu_+\tau}{\nu_+\operatorname{sh}\nu_+\operatorname{ch}\nu_+T}+\frac{\Lambda_+}{\nu_-^2-\omega^2}\cdot\frac{\operatorname{ch}^2\nu_-\tau}{\nu_-\operatorname{sh}\nu_-T\operatorname{ch}\nu_-T}$$

$$-\left(\frac{\Lambda_+}{\nu_+^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{\nu_+\operatorname{sh}\nu_+T\operatorname{ch}\nu_-T}+\frac{\Lambda_-}{\nu_-^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{\nu_-\operatorname{sh}\nu_-T\operatorname{ch}\nu_+T}\right)\operatorname{ch}\nu_+\tau\operatorname{ch}\nu_-\tau\Bigg]$$

$$-\frac{\Omega^2}{2m\Lambda}\cdot\frac{1}{\nu_+^2-\nu_-^2}\cdot\Bigg[\frac{\nu_+^2-\omega^2}{\nu_+}\cdot\frac{\operatorname{ch}^2\nu_+\tau}{\operatorname{sh}\nu_+T\operatorname{ch}\nu_+T}+\frac{\nu_-^2-\omega^2}{\nu_-}\cdot\frac{\operatorname{ch}^2\nu_-\tau}{\operatorname{sh}\nu_-T\operatorname{ch}\nu_-T}$$

$$-\left(\frac{\nu_-^2-\omega^2}{\nu_+}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}\nu_+T\operatorname{ch}\nu_-T}+\frac{\nu_+^2-\omega^2}{\nu_-}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}\nu_-T\operatorname{ch}\nu_+T}\right)\operatorname{ch}\nu_+\tau\operatorname{ch}\nu_-\tau\Bigg]$$

$$+\frac{\Omega^2}{2mM}\cdot\frac{1}{\nu_+^2-\nu_-^2}\cdot\Bigg[\frac{\nu_+^2-\omega^2}{\Omega}\cdot\frac{\operatorname{sh}^2\nu_+\tau}{\operatorname{sh}^2\nu_+T}+\frac{\nu_-^2-\omega^2}{\Omega}\cdot\frac{\operatorname{sh}^2\nu_-\tau}{\operatorname{sh}^2\nu_-T}$$

$$-\left(\frac{\nu_+^2-\omega^2}{\Omega}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}\nu_+T\operatorname{sh}\nu_-T}+\frac{\nu_-^2-\omega^2}{\Omega}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}\nu_-T\operatorname{sh}\nu_+T}\right)\operatorname{sh}\nu_+\tau\operatorname{sh}\nu_-\tau\Bigg]\Bigg\}.$$

Der erste Summand hängt nicht mehr von τ ab. Seine Integration ergibt einfach den Faktor 2T. Die Integrationen über die in den anderen Summanden auftretenden hyperbolischen Funktionen sind in [A8] nachzulesen. Wir erhalten so

4-4
$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(c,0,0,T,-T) = {} & \frac{T\Omega}{m}\cdot\frac{1}{v_+^2-v_-^2}\cdot\left[\frac{1}{v_+}\,\mathrm{cth}\,v_+T-\frac{1}{v_-}\,\mathrm{cth}\,v_-T\right] \\
& +\frac{\Omega^2 c}{m^2\Lambda}\cdot\frac{1}{v_+^2-v_-^2}\cdot\left[\frac{\Lambda_-}{v_+^2-\omega^2}\cdot\frac{T}{v_+\,\mathrm{sh}\,v_+T\,\mathrm{ch}\,v_+T}+\frac{\Lambda_+}{v_-^2-\omega^2}\cdot\frac{T}{v_-\,\mathrm{sh}\,v_-T\,\mathrm{ch}\,v_-T}+\frac{\Lambda_-}{v_+^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{v_+^2}\right. \\
& \left.+\frac{\Lambda_+}{v_-^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{v_-^2}-2\,\frac{v_+\,\mathrm{th}\,v_+T-v_-\,\mathrm{th}\,v_-T}{v_+^2-v_-^2}\cdot\left(\frac{\Lambda_+}{v_+^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{v_+}\,\mathrm{cth}\,v_+T+\frac{\Lambda_-}{v_-^2-\omega^2}\cdot\frac{1}{v_-}\,\mathrm{cth}\,v_-T\right)\right] \\
& -\frac{\Omega^2}{2m\Lambda}\cdot\frac{1}{v_+^2-v_-^2}\cdot\left[\frac{v_+^2-\omega^2}{v_+}\cdot\frac{T}{\mathrm{sh}\,v_+T\,\mathrm{ch}\,v_+T}+\frac{v_-^2-\omega^2}{v_-}\cdot\frac{T}{\mathrm{sh}\,v_-T\,\mathrm{ch}\,v_-T}+\frac{v_+^2-\omega^2}{v_+^2}+\frac{v_-^2-\omega^2}{v_-^2}\right. \\
& \left.-2\,\frac{v_+\,\mathrm{th}\,v_+T-v_-\,\mathrm{th}\,v_-T}{v_+^2-v_-^2}\left(\frac{v_-^2-\omega^2}{v_+}\,\mathrm{cth}\,v_+T+\frac{v_+^2-\omega^2}{v_-}\,\mathrm{cth}\,v_-T\right)\right] \\
& +\frac{\Omega^2}{2mM}\cdot\frac{1}{v_+^2-v_-^2}\cdot\left[-\frac{v_+^2-\omega^2}{\Omega}\cdot\frac{T}{\mathrm{sh}^2\,v_+T}-\frac{v_-^2-\omega^2}{\Omega}\cdot\frac{T}{\mathrm{sh}^2\,v_-T}+\frac{v_+^2-\omega^2}{\Omega v_+}\,\mathrm{cth}\,v_+T\right. \\
& \left.\left.+\frac{v_-^2-\omega^2}{\Omega v_-}\,\mathrm{cth}\,v_-T-2\,\frac{v_+\,\mathrm{cth}\,v_+T-v_-\,\mathrm{cth}\,v_-T}{v_+^2-v_-^2}\left(\frac{v_+^2-\omega^2}{\Omega}+\frac{v_-^2-\omega^2}{\Omega}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Kapitel V: Die Bestimmung der *green*schen Funktion am Ursprung

Wir haben im folgenden also eine Funktion (von c und T) zu finden, deren logarithmische Ableitung mit (4-4) übereinstimmt, und die für c=0 mit der bekannten *green*schen Funktion des freien Oszillators übereinstimmt. Sie ist durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt. Wenn wir also zur Auffindung der Lösung Annahmen über das Aussehen der *green*schen Funktion machen, so haben wir damit, sofern wir eine Lösung finden, keine weitere verschlampt.

Doch bevor wir nun die Integration ausführen, bringen wir (4-4) noch in eine angenehmere, weil überschaubarere Form:

5-1
$$\begin{aligned}\mathcal{J}(c) = \frac{\Omega}{2m}\cdot\frac{1}{\nu_+^2-\nu_-^2}\cdot\Bigg\{ & T\cdot\Bigg[\frac{2}{\nu_+}\mathrm{cth}\,2\nu_+T-\frac{2}{\nu_-}\mathrm{cth}\,2\nu_-T-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\nu_-^2-\Omega^2}{\mathrm{ch}^2\nu_+T}+\frac{\nu_+^2-\Omega^2}{\mathrm{ch}^2\nu_-T}\right)\\ & \qquad +\frac{1}{\mu}\left(\frac{\nu_-^2-\Omega^2}{\mathrm{sh}^2\nu_+T}+\frac{\nu_+^2-\Omega^2}{\mathrm{sh}^2\nu_-T}\right)\Bigg]\\ & +\Bigg[-\frac{1}{\nu_+^2}+\frac{1}{\nu_-^2}-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\nu_-^2-\Omega^2}{\nu_+}\mathrm{th}\,\nu_+T+\frac{\nu_+^2-\Omega^2}{\nu_-}\mathrm{th}\,\nu_-T\right)-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\nu_-^2-\Omega^2}{\nu_+}\mathrm{cth}\,\nu_+T+\frac{\nu_+^2-\Omega^2}{\nu_-}\mathrm{cth}\,\nu_-T\right)\\ & \qquad +\frac{2}{\nu_+^2-\nu_-^2}\Big\{\frac{1}{\lambda}\left(\nu_+\mathrm{th}\,\nu_+T-\nu_-\mathrm{th}\,\nu_-T\right)\left((\nu_+^2-\Omega^2)+(\nu_-^2-\Omega^2)\right)\\ & \qquad\qquad +\frac{1}{\mu}\left(\nu_+\mathrm{cth}\,\nu_+T-\nu_-\mathrm{cth}\,\nu_-T\right)\left((\nu_+^2-\Omega^2)+(\nu_-^2-\Omega^2)\right)\Big\}\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Wir haben hierbei regen Gebrauch von (3.4-3) und (3.4-7) sowie den Definitionen der Λ und M gemacht. (Z.B. in der Form

$$\Lambda_{\mp}(v_{\pm}^2-\Omega^2)-\Omega(v_{\mp}^2-\Omega^2) = \pm\Lambda - v_{\pm}(v_{\mp}^2-\Omega^2)\,\mathrm{th}\, v_{\pm}T \,.) \tag{5-2}$$

Außerdem wurde noch nach den Summanden, die T als Faktor enthalten, und solchen, die dies nicht tun, sortiert, sowie einen gemeinsamen Faktor vor den ganzen Ausdruck gezogen. Die Ortsabhängigkeit wird hier und im folgenden unterdrückt, da klar ist daß wir uns am Ursprung befinden, ebenso wie die T-Abhängigkeit, da T für uns eher ein Parameter ist. Wir dürfen nur nicht vergessen, daß (5-1) für alle T gelten muß.

Wir bemerken jetzt, daß K(c) nur noch vermittels der v_{+-} von c abhängt, und diese wiederum nur über den inneren Wurzelausdruck in (3.3-5). Nichts liegt also näher, als zu diesem als neuer Variabelen v überzugehen. Wir tun dies derart, daß zu c=0 der Wert v=0 gehört, sowie daß positiven c auch positive v entsprechen:

$$v(c) = \tfrac{1}{2}|\Omega^2-\omega^2| - \sqrt{\tfrac{1}{4}(\Omega^2-\omega^2)^2 - \frac{2\Omega c}{m}} \,. \tag{5-3}$$

Wir sehen, daß der Vorfaktor in (5-1) gerade ein viertel der Ableitung dv/dc ergibt. M.a.W. wenn wir die Funktion k(v) definieren als

$$k(v) = \frac{\partial}{\partial v}\ln G(c(v)) = \frac{dc}{dv}(v)\cdot K(c(v)), \tag{5-4}$$

so ist das gerade ein viertel von (5-1) ohne den Vorfaktor, wobei die v_{+-} nun Funktionen von v sind:

$$V_{\pm}(v) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\Omega^2+\omega^2) \pm \tfrac{1}{2}|\Omega^2-\omega^2| \mp v} \,. \tag{5-5}$$

Für die weiteren Betrachtungen benötigen wir noch die Ableitungen

5-6 $$\frac{d v_\pm}{dv}(v) = \mp \frac{1}{2\, v_\pm(v)}$$

und

5-7 $$\frac{d\,(v_\pm^2)}{dv}(v) = \mp 1 .$$

Wie die Funktion k(v) zu integrieren ist, scheint zunächst nicht offensichtlich zu sein. Wenn wir aber annehmen, daß die Stammfunktionen T nur innerhalb des Argumentes hyperbolischer Funktionen (also exponentieller Ausdrücke) enthalten, so ist klar, daß die Terme in k(v), die T als Faktor enthalten, nur durch Ableiten nach dem v innerhalb des Argumentes entstanden sein können. Wir erhalten diese Terme also, indem wir in der Stammfunktion die v außerhalb der hyperbolischen Funktionen für die Ableitung formal als Konstante behandeln. Wir erkennen dann relativ leicht, daß die beiden Terme in eckigen Klammern, die durch Λ bzw. M dividiert werden, gerade – bis auf einen Faktor – durch die besprochenen Ableitungen von Λ bzw. M gegeben sind. Dies ermutigt uns, nun die Ableitung von Λ und M unter Berücksichtigung der vollen v-Abhängigkeit auszurechnen. Wir erhalten:

5-8 $$\begin{aligned}\frac{\partial \Lambda}{\partial v} = {} & \frac{T}{2} \cdot \frac{v_+^2 - \Omega^2}{ch^2 v_- T} + \frac{T}{2} \cdot \frac{v_-^2 - \Omega^2}{ch^2 v_+ T} \\ & + \frac{v_+^2 - \Omega^2}{2 v_-}\, th\, v_- T + \frac{v_-^2 - \Omega^2}{2 v_+}\, th\, v_+ T \\ & - (\Omega + v_-\, th\, v_- T) - (\Omega + v_+\, th\, v_+ T) ,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial M}{\partial v} = -\frac{T}{2} \cdot \frac{v_+^2 - \Omega^2}{sh^2 v_- T} - \frac{T}{2} \cdot \frac{v_-^2 - \Omega^2}{sh^2 v_+} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{v_+^2-\Omega^2}{2v_-}\,\mathrm{cth}\, v_- T + \frac{v_-^2-\Omega^2}{2v_+}\,\mathrm{cth}\, v_+ T$$

$$-(\Omega + v_-\,\mathrm{cth}\, v_- T) - (\Omega + v_+\,\mathrm{cth}\, v_+ T).$$

Damit sehen wir also, daß durch

5-9 $$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial v} + \frac{\partial \ln M}{\partial v}\right)$$

fast alle Terme, die Λ oder M enthalten geliefert werden. Nur die jeweils letzten machen Schwierigkeiten. Mit den Bezeichnnungen

5-10 $$a_\pm = \frac{\Lambda_\pm}{2\Lambda} \quad \text{bzw.} \quad \frac{M_\pm}{2M},$$

$$b_\pm = \frac{v_\pm^2 - \Omega^2}{v_+^2 - v_-^2}$$

sehen wir, daß wir Terme mit der Struktur

5-11 $$(a_+ - a_-)\cdot(b_+ + b_-)$$

benötigen, aber solche mit der Struktur

5-12 $$(a_+ + a_-)\cdot(b_+ - b_-)$$

erhalten. Von den letzteren müssen wir noch

5-13 $$2(a_- b_+ - a_+ b_-) = \frac{1}{v_+^2 - v_-^2}$$

in beiden Fällen abziehen um erstere zu erhalten. Somit können wir k(v) schreiben als

$$k = \frac{T}{2}\left(\frac{\mathrm{cth}\,2v_+T}{v_+} - \frac{\mathrm{cth}\,2v_-T}{v_-}\right) - \frac{1}{4v_+^2} + \frac{1}{4v_-^2} - \frac{1}{v_+^2 - v_-^2} \tag{5-14}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial v} + \frac{\partial \ln M}{\partial v}\right)$$

Die restlichen Integrationen sind elementar:

$$k = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\ln \mathrm{sh}\,2v_+T - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\ln \mathrm{sh}\,2v_-T \tag{5-15}$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial v}\ln v_+^2 + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial v}\ln v_-^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\ln(v_+^2 - v_-^2)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial v} + \frac{\partial \ln M}{\partial v}\right).$$

Unsere *green*sche Funktion schreibt sich also

$$G(c(v)) = G(0)\cdot\left[\frac{\mathrm{sh}\,2v_+(0)T\cdot \mathrm{sh}\,2v_-(0)T\cdot\Lambda(0)\cdot M(0)}{v_+(0)\,v_-(0)\,(v_+^2(0) - v_-^2(0))}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5-16}$$

$$\cdot\left[\frac{v_+(v)\,v_-(v)\,(v_+^2(v) - v_-^2(v))}{\mathrm{sh}\,2v_+(v)T\cdot \mathrm{sh}\,2v_-(v)T\cdot\Lambda(v)\cdot M(v)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Kapitel VI: Das Spektrum

Wie können wir nun aus (5–16) das Spektrum gewinnen? Wir wissen, daß in der herkömmlichen QM (d.h. mit lokalen Potentialen) die *green*sche Funktion wie folgt schreiben läßt:

6-1 $$G(x,y,T,-T) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x,y)\, e^{-2T E_n}$$

Wenn wir also überhaupt mit einiger Berechtigung von einem Spektrum reden wollen, so müssen wir (5–16) in eine Reihe über Exponentialfunktionen entwickeln können, bei der wie in (6–1) die T-Abhängigkeit in den Exponenten, aber die Ortsabhängigkeit in den Koeffizienten steckt.

Mit dem Ergebnis für G(0) in [A9] finden unter Berücksichtigung der Beziehungen

6-2 $$V_+(0) = \mathrm{Max}(\Omega,\omega) \quad , \quad V_-(0) = \mathrm{Min}(\Omega,\omega)$$

für das Produkt von G(0) mit der Wurzel der ersten eckigen Klammer in (5–16) folgenden Ausdruck

6-3 $$G(0)\cdot\left[\frac{\mathrm{sh}\,2V_+(0)T\,\mathrm{sh}\,2V_-(0)T\cdot\Lambda(0)\cdot M(0)}{V_+(0)\,V_-(0)\,(V_+^2(0)-V_-^2(0))}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= e^{\Omega T}\cdot\sqrt{\frac{m\Omega}{\pi}\,|\Omega^2-\omega^2|}$$

Ziehen wir aus der zweiten eckigen Klammer noch den Faktor

6-4 $$e^{-v_+(v)T} \cdot e^{-v_-(v)T}$$

heraus, so läßt sich nach einigen Umformungen (5-16) schreiben als

6-5 $$G(c(v)) = \sqrt{\frac{m\Omega}{\pi}\left|\Omega^2-\omega^2\right|} \cdot e^{-\frac{1}{2}(v_+(v)+v_-(v)-\Omega)\cdot 2T}$$

$$\cdot\, h(v) \cdot \left[\frac{1}{1 + x_+(v)\cdot e^{-2v_+(v)\cdot 2T} + x_-(v)\cdot e^{-2v_-(v)\cdot 2T} + y(v)\cdot e^{(v_+(v)+v_-(v))\cdot 2T}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Von den hier eingeführten Funktionen h(v),x_{+-}(v) und y(v) brauchen wir nicht mehr zu wissen, als daß sie nicht T-abhängig sind, daß für v=0 ebenfalls ungleich null sind, und daß sie, außer vielleicht für ganz bestimmte v-Werte, nicht-kommensurabele Logarithmen haben. Damit erhalten wir einerseits für die Grundzustandsenergie unseres Oszillators

6-6 $$E_0 = \frac{1}{2}\left(v_+ + v_- - \Omega\right).$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem über ein, das *Dosch* und *Simonov* in [1] für unseren Fall erhalten haben.

Andererseits können wir die eckige Klammer in (6-5) mit unterdrückter v-Abhängigkeit schreiben als

6-7 $$\left[\frac{1}{1 \pm e^{\ln(\pm x_+)-2v_+\cdot 2T} \pm e^{\ln(\pm x_-)-2v_-\cdot 2T} \pm e^{\ln(\pm y)-(v_+ + v_-)\cdot 2T}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Dies läßt sich mit dem allgemeinen binomischen Satz und nachfolgend mit dem polynomischen Satz in eine dreifache Potenzreihe der drei Exponentialfunktionen entwickeln. Da nun die Exponenten nicht-kommensurabel sind, ist es auch nicht möglich, daß sich Beiträge, die zu gleichen Kombinationen der ν_{+-} führen, sich gegenseitig wegheben.

Damit können wir nun alle in 5-16 vorkommenden Werte des Spektrums wie folgt zusammenfassen

6-8 $$E_{n_+ n_-} = E_0 + n_+ \nu_+ + n_- \nu_- \quad , n_\pm \in \mathbb{N}_0 \quad , \frac{n_+ + n_-}{2} \in \mathbb{N}_0$$

Nun wissen wir, daß in der herkömmlichen QM zu G(0,0,T,-T) aus Symmetriegründen nur die geradzahligen Anteile des Spektrums beitragen. Wir haben also guten Grund zur Annahme, daß wir auch in unserem Fall nur die 'Hälfte' des Spektrums heraus bekommen haben. Dafür spricht auch die etwas unnatürlich wirkende Bedingung, daß die Summe von n_+ und n_- geradzahlig sein muß.

Wir haben ja in Kapitel II mit (2-12) bereits das Rüstzeug bereitgestellt, auch das ungeradzahlige Spektrum auszurechnen. Wir äußern zum Schluß noch die Vermutung, daß Ausdrücke analog wie in (6-8) auftreten, nur daß nun $n_+ + n_-$ ungeradzahlig sein muß, sowie daß beide Anteile zusammen das volle Spektrum ergeben. Das Spektrum hätte somit das Aussehen

6-9 $$E_{n_+ n_-} = E_0 + n_+ \nu_+ + n_- \nu_- \quad , n_\pm \in \mathbb{N}_0$$

$$= (n_+ + \tfrac{1}{2}) \nu_+ + (n_- + \tfrac{1}{2}) \nu_- - \tfrac{1}{2} \Omega \quad .$$

Anhänge

A1: Die *green*sche Funktion der Oszillatorgleichung

Die gesuchte Funktion ist gegeben durch

A1-1 $$g(t) = \frac{e^{-\omega|t|}}{2m\omega} = \frac{e^{\omega t}}{2m\omega} - \vartheta(t) \cdot \frac{\operatorname{sh}\omega t}{m\omega}$$

Zum Beweis berechnen wir die im Distributionssinne (s.z.B. [4])

A1-2 $$\ddot{g}(t) = \omega^2 \frac{e^{\omega t}}{2m\omega} - \left(\omega^2 \vartheta(t) \frac{\operatorname{sh}\omega t}{m\omega} + 2\omega\delta(t) \frac{\operatorname{ch}\omega t}{m\omega} + \delta'(t) \frac{\operatorname{sh}\omega t}{m\omega}\right)$$

$$= \omega^2 g(t) - \frac{\delta(t)}{m}$$

und damit ergibt sich die Behauptung

A1-3 $$\delta(t) = m\left(\omega^2 g(t) - \ddot{g}(t)\right).$$

A2: Die Funktion χ (t)

A2-1 $$-\frac{2m\omega}{c}\,\chi(t) = \int ds\; e^{-\omega\left||t|-s\right|}\, e^{-\Omega|s|}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} ds\; e^{-\omega(|t|-s)+\Omega s} + \int_{0}^{|t|} ds\; e^{-\omega(|t|-s)-\Omega s}$$

$$+ \int_{|t|}^{\infty} ds\; e^{\omega(|t|-s)-\Omega s}$$

$$= e^{-\Omega|t|}\,\frac{2\omega}{\omega^2-\Omega^2} + e^{-\omega|t|}\,\frac{2\Omega}{\Omega^2-\omega^2}\,.$$

A3: Definitionen und wichtige Eigenschaften der *Fourier*-Reihen

Sei $f: [-T, T] \longrightarrow \mathbb{C}$, stetig und rektifizierbar. Nach dem Satz von *Dirichlet* (s.u.) ist f in eine *Fourier*-Reihe entwickelbar

A3-1 $$f(t) = \sum_m f_m \, e^{im\frac{\pi}{T}t}$$

mit den *Fourier*-Koeffizienten

A3-2 $$f_m = \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} dt \, f(t) e^{-im\frac{\pi}{T}t} .$$

Sie erfüllen die mehr oder weniger ersichtlichen Beziehungen

1.	$f(t) \in \mathbb{R}$	$\Longleftrightarrow$	$f_m^* = f_{-m}$
2.a	$f(t) = f(-t)$	$\Longleftrightarrow$	$f_m = f_{-m}$
2.b	$f(t) = -f(-t)$	$\Longleftrightarrow$	$f_m = -f_{-m}$

1. + 2.a	$\Longleftrightarrow$	$f_m = \mathrm{Re}\, f_m$ + 2.a.
1. + 2.b	$\Longleftrightarrow$	$f_m = i\, \mathrm{Im}\, f_m$ + 2.b.

Der mit einer stetigen Funktion $H: [-T, T]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ erklärte lineare Operator

A3-3 $$g(t) = \int_{-T}^{T} ds \, H(t, s) \, f(s)$$

der eine stetige Funktion f in eine stetige Funktion g überführt, transformiert sich

A3-4 $$g_m = \sum_n H_{mn} f_n$$

wobei

A3-5 $$H_{mn} = \frac{1}{2T} \iint_{-T}^{T} dt\, ds\, e^{-im\frac{\pi}{T}t} H(t,s)\, e^{in\frac{\pi}{T}s}$$

definiert wurde. Die Umkehrung ist durch

A3-6 $$H(t,s) = \frac{1}{2T} \cdot \sum_{m,n} e^{im\frac{\pi}{T}t} H_{mn}\, e^{-in\frac{\pi}{T}s}$$

gegeben.

Auch für die H_{mn} gelten die wichtigen Beziehungen

1. $H(t,s) \in \mathbb{R} \iff H_{mn}^* = H_{-m-n}$
2. $H_{mn} \in \mathbb{R} \iff H^*(t,s) = H(-t,-s)$

Zum Schluß sei noch nach [5] der Satz von *Dirichlet* leicht modifiziert zitiert.

Satz (*Dirichlet*): Sei die Funktion f: $[-T, T] \longrightarrow \mathbb{C}$ auf endlich vielen Teilintervallen des Definitionsbereiches monoton und stetig, und existieren an den Unstetigkeitsstellen sowie den Intervallgrenzen die rechts- und linksseitigen Ableitungen.

Dann konvergiert die *Fourier*-Reihe von f im Inneren der Intervalle gegen f, an den Unstetigkeitsstellen gegen das arithmetische Mittel des rechts- und linksseitigen Grenzwerts von f, und an Grenzen des Definitionsbereichs gegen das arithmetische Mittel der Grenzwerte von f an den Grenzen.

A4: Die *Fourier*-Koeffizienten der auftretenden Funktionen

Die *Fourier*-Koeffizienten der Funktionen $g_{+-}(t)$, die die homogenen Anteile der Lösung bestimmen, erhalten wir aus der Darstellung der Exponentialfunktion im Intervall $(-\pi, \pi)$:

A4-1 $$e^{ax} = \frac{\operatorname{sh} \pi a}{\pi} \sum_{l} (-1)^l \frac{a+il}{a^2+l^2} e^{ilx}$$

Sie folgt aus der Tatsache, daß nach dem Satz von *Dirichlet* e^{ax} entwickelbar ist und aus der Berechnung der *Fourier*-Koeffizienten nach (A3-2). Die hyperbolischen Funktionen ergeben sich damit unter Beachtung von (3.2-9) zu

A4-2 $$\operatorname{ch} \omega t = \operatorname{ch} \alpha \pi \frac{t}{T} = \frac{\operatorname{sh} \pi \alpha}{\pi} \cdot \sum_{l} (-1)^l \frac{\alpha e^{il\pi \frac{t}{T}}}{\alpha^2 + l^2},$$

$$\operatorname{sh} \omega t = \operatorname{sh} \alpha \pi \frac{t}{T} = \frac{\operatorname{sh} \pi \alpha}{\pi} \cdot \sum_{l} (-1)^l \frac{l e^{il\pi \frac{t}{T}}}{\alpha^2 + l^2}$$

und die *Fourier*-Koeffizienten sind

A4-3 $$\tilde{g}_{+l} = \frac{\operatorname{sh} \pi \alpha}{\pi} (-1)^l \frac{\alpha}{\alpha^2+l^2},$$

$$\tilde{g}_{-l} = \frac{\operatorname{sh} \pi \alpha}{\pi} (-1)^l \frac{l}{\alpha^2+l^2}.$$

Durch eine geeignete Umskalierung können wir zu neuen Koeffizienten g_{+-l} übergehen derart, daß (3.3-2) gilt.

Berechnen wir die *Fourier*-Koeffizienten von $g_{\tau}(t)$. Sie sind gegeben durch

A4-4 $$g_\ell(\tau) = \frac{1}{2m\omega}\cdot\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, e^{-i\ell\pi\frac{t}{T}}\, e^{-\omega|t-\tau|}$$

$$= \frac{1}{2m\omega}\cdot\frac{1}{2T}\cdot\left[\int_{-T}^{\tau} dt\, e^{-i\ell\pi\frac{t}{T}}\cdot e^{\omega(t-\tau)} + \int_{\tau}^{T} dt\, e^{-i\ell\pi\frac{t}{T}}\cdot e^{-\omega(t-\tau)}\right]$$

$$= \frac{1}{2m\omega}\cdot\frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{\omega^2+(\ell\frac{\pi}{T})^2}\cdot\Big[2\omega\, e^{-i\ell\pi\frac{\tau}{T}}$$

$$- e^{-\omega T}\cdot(-1)^\ell\cdot\Big(\omega\big(e^{\omega\tau}+e^{-\omega\tau}\big) - i\ell\frac{\pi}{T}\big(e^{\omega\tau}-e^{-\omega\tau}\big)\Big)\Big].$$

Ersetzen wir wieder gemäß (3.2-9), so erkennen wir, daß es sich bei den letzten beiden Summanden um eine Linearkombination der g_{+-} handelt. Den verbleibenden ersten Summanden bezeichnen wir mit

A4-5 $$g_{0\ell}(\tau) = \frac{1}{2m}\cdot\frac{T}{\pi^2}\cdot\frac{e^{-i\ell\pi\frac{\tau}{T}}}{\alpha^2+\ell^2}.$$

Damit ergibt sich unmittelbar die behauptete Darstellung (3.3-2).

Zur Berechnung der *Fourier*-Koeffizienten von χ benötigen wir zunächst diejenigen von $e^{-\omega|t-s|}$

A4-6 $$\frac{1}{2T}\iint_{-T}^{T} dt\, ds\, e^{-i\ell\pi\frac{t}{T}}\, e^{-\omega|t-s|}\, e^{im\pi\frac{s}{T}}.$$

Das Ergebnis des t-Integrals kennen wir schon. Wir brauchen lediglich in (A4-4) den Vorfaktor $1/(2m\omega)$ wegzulassen, τ durch s zu ersetzen, und mit $e^{im\pi s/T}$ zu multiplizieren. Die nachfolgende s-Integration ergibt für den ersten Summanden im Wesentlichen ein *Kronecker*-Delta. Die beiden letzten lassen sich auf (A4-2 bzw. 3) zurückführen. Wir erhalten

A4-7 $$\frac{2\omega}{\omega^2+(l\frac{\pi}{T})^2}\,\delta_{lm}-(-1)^{l+m}\cdot\frac{1-e^{-2\omega T}}{T}\cdot\frac{\omega^2-lm\left(\frac{\pi}{T}\right)^2}{\left(\omega^2+(l\frac{\pi}{T})^2\right)\cdot\left(\omega^2+(m\frac{\pi}{T})^2\right)}\,.$$

Zusammen mit (A2-1) folgt dann die in (3.2-10) behauptete Darstellung für χ_{lm}.

A5: Die geometrische Reihe einer Operatorsumme

Satz: Seien M_0 und M_1 zwei lineare Operatoren in einem *Banach*-Raum, und sei $\|M_0\| + \|M_1\| < 1$. Dann gilt mit

A5-1 $$\mathcal{M}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} M_0^n$$

(a) $\mathcal{M}_0$ sowie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (M_0 + M_1)^n$ existieren normkonvergent.

(b) Es gilt

A5-2 $$\sum_{n=0}^{\infty} (M_0+M_1)^n = \mathcal{M}_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (M_1 \mathcal{M}_0)^k$$

Beweis: (a) Die Normkonvergenz folgt direkt aus der Konvergenz der geometrischen Reihen über die Normen.

(b) 1. Auch die Existenz der rechten Seite zeigen wir, indem wir sie mit den Normen statt mit den Operatoren ausrechnen. Es gilt

A5-3 $$\|\mathcal{M}_0\| \leq \frac{1}{1-\|M_0\|} ,$$

und damit nach Voraussetzung

A5-4 $$\|M_1 \mathcal{M}_0\| \leq \frac{\|M_1\|}{1-\|M_0\|} < \frac{\|M_1\|}{\|M_1\|} = 1$$

woraus die Existenz des Grenzwertes folgt.

2. Die linke Seite erfüllt die Beziehung

$$\text{A5-5} \quad (\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1) \cdot (L.H.S.) = (L.H.S.) - I$$

oder gleichwertig

$$\text{A5-6} \quad (L.H.S.) = (I - \mathcal{M}_0 - \mathcal{M}_1)^{-1}$$

Sie ist dadurch also schon eindeutig bestimmt. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß auch die rechte Seite (A5-5) erfüllt:

$$\text{A5-7} \quad (\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1) \cdot (R.H.S.) = (\mathcal{M}_0 - I) \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_0)^k - I$$

$$= (R.H.S.) - I$$

qed

A6: Die Berechnung der Summen über $\mathcal{D}_l$

Wir formulieren und beweisen zunächst einen Satz unter dessen Voraussetzungen sich alle benötigten Summen einordnen lassen.

Satz: Seien $c_l \in \mathbb{C}$ für $l \in \mathbb{Z}$ Zahlen, für die es ein $M \in \mathbb{R}$ sowie ein $L_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß gilt

$$l > L_0 \implies |c_l| < Ml^2.$$

Mit der Bezeichnung

$$g_l(x,y,z) = \frac{z}{(x+l^2)\cdot(y+l^2)}$$

gilt dann:

(a) Die Summe

$$P(x,y,z) = \sum_l \sum_{n=1}^{\infty} c_l \, g_l^n(x,y,z)$$

konvergiert auf

$$\mathbb{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, |g_l(x,y,z)| < 1 \text{ für alle } l \in \mathbb{Z} \right\}$$

gegen eine analytische Funktion der Variabelen x,y,z.

(b) Für jede Funktion $\sqrt{\cdot}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $\sqrt{z}^2 = z$ auf $\mathbb{C}$ gilt

A6-1 $$\mathcal{P}(x,y,z) = \sum_{\ell} c_\ell\, \rho_\ell\left(\tfrac{1}{2}(x+y)+\sqrt{\tfrac{1}{4}(x-y)^2+z},\ \tfrac{1}{2}(x+y)-\sqrt{\tfrac{1}{4}(x-y)^2+z},\ z\right)$$

Beweis: (a) Die Summe $P_l(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_l^n(x,y,z)$ konvergiert auf $\mathbb{D}$ gegen die analytische Funktion

A6-2 $$P_\ell(x,y,z) = \rho_\ell(x,y,z) \cdot \frac{1}{1-\rho_\ell(x,y,z)} .$$

Sie läßt sich lokal durch $|C \cdot \rho_l(x,y,z)|$ mit einer geeigneten positiven Zahl C, die nicht von l abhängt, abschätzen. Die Summe über P_l ist deshalb als lokal gleichmäßig konvergenter Grenzwert analytischer Funktionen ebenfalls analytisch.

(b) Die Behauptung folgt durch direkte Umformung von (A6-2):

A6-3 $$P_\ell(x,y,z) = \frac{z}{(x+\ell^2)\cdot(y+\ell^2) - z}$$

$$= \frac{z}{\left(\tfrac{1}{2}(x+y)+\ell^2+\tfrac{1}{2}(x-y)\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}(x+y)+\ell^2-\tfrac{1}{2}(x-y)\right) - z}$$

$$= \frac{z}{\left(\tfrac{1}{2}(x+y)+\ell^2\right)^2 - \tfrac{1}{4}(x-y)^2 - z}$$

$$= \rho_\ell\left(\tfrac{1}{2}(x+y)+\sqrt{\tfrac{1}{4}(x-y)^2+z},\ \tfrac{1}{2}(x+y)-\sqrt{\tfrac{1}{4}(x-y)^2+z},\ z\right)$$

qed

Mit den Ersetzungen

A6-4 $$z = -\frac{2\beta c}{m}\left(\frac{T}{\tau}\right)^3 \quad , \; x = \alpha^2 \quad , \; y = \beta^2$$

erkennen wir, daß $D_l = \rho_l(x,y,z)$ gilt. Damit haben wir

A6-5 $$D_l = 1 + P_l(x,y,z).$$

Die c_l, die nun bei der Berechnung der Summen

A6-6 $$(e\mathcal{D}\,g_0(\tau))(t) \qquad , \; (e\mathcal{D}M^i)(t)$$

auftreten, enthalten alle einen Faktor $1/(x+l^2)$ oder $1/(y+l^2)$. Wir führen noch die Abkürzungen

A6-7 $$\gamma_\pm = \frac{1}{2}(x+y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(x-y)^2 + z}$$

ein und berechnen

A6-8 $$\frac{1}{x+l^2}\cdot\left(1 + P_l(x,y,z)\right)$$

$$= \frac{1}{x+l^2}\left(1 - \frac{z}{\gamma_+-\gamma_-}\left(\frac{1}{\gamma_++l^2} - \frac{1}{\gamma_-+l^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x+l^2} - \frac{z}{\gamma_+-\gamma_-}\cdot\left[\frac{1}{\gamma_+-x}\left(\frac{1}{x+l^2} - \frac{1}{\gamma_++l^2}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\gamma_--x}\left(\frac{1}{x+l^2} - \frac{1}{\gamma_-+l^2}\right)\right] = \ldots$$

$$\ldots = \frac{2}{\gamma_+ - \gamma_-}\left(\frac{1}{\gamma_+ - x}\cdot\frac{1}{\gamma_+ + l^2} - \frac{1}{\gamma_- - x}\cdot\frac{1}{\gamma_+ + l^2}\right).$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt von der Beziehung

A6-9 $$\frac{1}{\gamma_+ - x} - \frac{1}{\gamma_- - x} = \frac{\gamma_+ - \gamma_-}{2}$$

Gebrauch gemacht, die zum Verschwinden der Terme proportional $1/(x+l^2)$ führt. Für den zweiten Fall genügt es x mit y zu vertauschen.

Für die $(e\mathfrak{D}S^1)(t)$ ergibt sich damit eine Linearkombination der Summen

A6-10 $$\sum_l (-1)^l \frac{e^{il\pi\frac{t}{T}}}{\gamma_\pm + l^2} \sim ch\sqrt{\gamma_\pm}\,\pi\frac{t}{T},$$

und für $(e\mathfrak{D}A^1)(t)$ eine der Summen

A6-11 $$\sum_l (-1)^l \frac{l\,e^{il\pi\frac{t}{T}}}{\gamma_\pm + l^2} \sim sh\sqrt{\gamma_\pm}\,\pi\frac{t}{T}.$$

Die Proportionalität zu den hyperbolischen Funktionen folgt hierbei nach (A4-2). Führen wir noch die Resubstitution der Parameter durch, so erhalten wir in der Tat (3.4-4), was zu zeigen war.

Für $(e\mathfrak{D}g_0(\tau))(t)$ sind die Summen

A6-12 $$\frac{T}{2m\pi^2}\cdot\sum_l \frac{e^{il\pi\frac{t-\tau}{T}}}{\gamma_\pm + l^2}$$

Führen wir noch eine Argumentverschiebung um T durch, so erhalten wir das alternierende Vorzeichen. Damit werden die Summen nach (A4-2) zu

A6-13 $$\frac{T}{2m\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma_\pm}\cdot sh\,\pi\sqrt{\gamma_\pm}}\cdot ch\sqrt{\gamma_\pm}\cdot\frac{\pi}{T}\,arg_\tau(t),$$

wobei die Funktion $\arg_\tau(t)$ durch Verschiebungen um 2T dafür zu sorgen hat, daß das Argument immer im Intervall [-T, T] liegt. Beachten wir noch die Symmetrieeigenschaft des Cosinus hyperbolicus, so können wir für $\arg_\tau(t)$ schreiben

A6-14 $$\arg_\tau(t) = T - |t - \tau| \; .$$

Dies zusammen mit (A6-8) und der Resubstitution der Parameter ergibt (3.3-7).

A7: Die Berechnung einiger Integrale zur Bestimmung des Integraloperators

$$\int ds\, e^{\Omega(t-s)} \cdot e^{\pm\nu(s-\delta)} = e^{\Omega t \mp \nu\delta} \cdot \int ds\, e^{(-\Omega \pm \nu)s}$$

$$= \frac{e^{\Omega t \mp \nu\delta}}{-\Omega \pm \nu} \cdot e^{(-\Omega \pm \nu)s}$$

$$\Rightarrow \int ds\, e^{\Omega(t-s)} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, \nu(s-\delta) \\ \mathrm{sh}\, \nu(s-\delta) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\Omega t - \nu\delta}}{-\Omega + \nu} \cdot e^{(-\Omega+\nu)s} \; (\pm) \; \frac{e^{\Omega t + \nu\delta}}{-\Omega - \nu} \cdot e^{(-\Omega-\nu)s} \right]$$

$$= \frac{e^{\Omega(t-s)}}{\nu^2 - \Omega^2} \begin{pmatrix} \Omega\, \mathrm{ch}\, \nu(s-\delta) + \nu\, \mathrm{sh}\, \nu(s-\delta) \\ \Omega\, \mathrm{sh}\, \nu(s-\delta) + \nu\, \mathrm{ch}\, \nu(s-\delta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{-T}^{T} ds\, e^{-\Omega|t-s|} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, \nu s \\ \mathrm{sh}\, \nu s \end{pmatrix} = \int_{-T}^{t} ds\, e^{-\Omega(t-s)} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, \nu s \\ \mathrm{sh}\, \nu s \end{pmatrix} + \int_{t}^{T} ds\, e^{\Omega(t-s)} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, \nu s \\ \mathrm{sh}\, \nu s \end{pmatrix}$$

$$(A7\text{-}*) \qquad = \frac{2}{\nu^2 - \Omega^2}\left[-\Omega \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, \nu t \\ \mathrm{sh}\, \nu t \end{pmatrix} + e^{-\Omega T} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, \Omega t\, (\Omega\, \mathrm{ch}\, \nu T + \nu\, \mathrm{sh}\, \nu T) \\ \mathrm{sh}\, \Omega t\, (\Omega\, \mathrm{sh}\, \nu T + \nu\, \mathrm{ch}\, \nu T) \end{pmatrix} \right]$$

$$\int_{-T}^{T} ds\, e^{-\Omega|t-s|} \operatorname{ch} \nu(T-|s-\tau|) =$$

1.) $t<\tau$

$$\int_{-T}^{t} ds\, e^{-\Omega(t-s)} \cdot \operatorname{ch} \nu(s-(\tau-T))$$

$$+ \int_{t}^{\tau} ds\, e^{\Omega(t-s)} \cdot \operatorname{ch} \nu(s-(\tau-T))$$

$$+ \int_{\tau}^{T} ds\, e^{\Omega(t-s)} \cdot \operatorname{ch} \nu(s-(\tau+T))$$

$$= \frac{2}{\nu^2-\Omega^2} \cdot \Big[-\Omega \operatorname{ch} \nu(T-(\tau-t)) + e^{-\Omega(\tau-t)} \cdot \nu \operatorname{sh} \nu T$$

$$+ e^{-\Omega T} (\Omega \operatorname{ch} \nu\tau \operatorname{ch} \Omega t - \nu \operatorname{sh} \nu\tau \operatorname{sh} \Omega t)\Big]$$

2.) $t>\tau$

$$\int_{-T}^{\tau} ds\, e^{-\Omega(t-s)} \operatorname{ch} \nu(s-(\tau-T))$$

$$+ \int_{\tau}^{t} ds\, e^{-\Omega(t-s)} \operatorname{ch} \nu(s-(\tau+T))$$

$$+ \int_{t}^{T} ds\, e^{+\Omega(t-s)} \operatorname{ch} \nu(s-(\tau+T)) = \ldots$$

...

$$= \frac{2}{\nu^2 - \Omega^2} \Big[-\Omega \, \mathrm{ch}\, \nu (T - (t-\tau)) + e^{-\Omega (t-\tau)} \cdot \nu \cdot \mathrm{sh}\, \nu T$$

$$+ e^{-\Omega T} (\Omega \, \mathrm{ch}\, \nu \tau \, \mathrm{ch}\, \Omega t - \nu \, \mathrm{sh}\, \nu \tau \, \mathrm{sh}\, \Omega T) \Big]$$

1.) + 2.) $\Rightarrow$

$$\int_{-T}^{T} ds \, e^{-\Omega |t-s|} \mathrm{ch}\, \nu (T - |s-\tau|)$$

$$= \frac{2}{\nu^2 - \Omega^2} \cdot \Big[-\Omega \, \mathrm{ch}\, \nu (T - |t-\tau|) + e^{-\Omega |t-\tau|}$$

$$+ e^{-\Omega T} (\Omega \, \mathrm{ch}\, \nu \tau \, \mathrm{ch}\, \Omega t - \nu \, \mathrm{sh}\, \nu \tau \, \mathrm{sh}\, \Omega t) \Big]$$

$$\int_{-T}^{T} d\tau \, ch^2 v\tau = \frac{1}{v} sh\, vT \, ch\, vT + T$$

$$\int_{-T}^{T} d\tau \, sh^2 v\tau = \frac{1}{v} sh\, vT \, ch\, vT - T$$

$$\int_{-T}^{T} d\tau \, ch\, v_+\tau \, ch\, v_-\tau = \frac{2}{v_+^2 - v_-^2} \left[v_+ \, sh\, v_+T \, ch\, v_-T - v_- \, sh\, v_-T \, ch\, v_+T \right]$$

$$= \frac{2 \, ch\, v_+T \, ch\, v_-T}{v_+^2 - v_-^2} \cdot \left(v_+ \, th\, v_+T - v_- \, th\, v_-T \right)$$

$$\int_{-T}^{T} d\tau \, sh\, v_+\tau \, sh\, v_-\tau = \frac{2}{v_+^2 - v_-^2} \cdot \left[v_+ \, ch\, v_+T \, sh\, v_-T - v_- \, ch\, v_-T \, sh\, v_+T \right]$$

$$= \frac{2 \, sh\, v_+T \, sh\, v_-T}{v_+^2 - v_-^2} \left(v_+ \, cth\, v_+T - v_- \, cth\, v_-T \right)$$

Der Beweis erfolgt durch Differentiation nach T unter Beachtung von

$$f(\tau) = f(-\tau) \Rightarrow \frac{d}{dT} \int_{-T}^{T} d\tau \, f(\tau) = 2 f(T)$$

A9: Die *greensche* Funktion bei c=0

Die *greensche* Funktion des freien Oszillators hat an der Stelle $(\xi,\eta)=0$ folgendes Aussehen

A9-1 $$G(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n}^2(0)\, e^{-2T\left(\frac{1}{2}+2n\right)\omega}$$

$$= e^{-\omega T} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n}^2(0) \cdot \left(e^{-4\omega T}\right)^n$$

Die φ_n sind hierbei das übliche orthonormierte System von Eigenfunktionen. Nach [6] erfüllen die Rekursionsformeln

A9-2 $$0 = \sqrt{2n+2}\, \varphi_{2(n+1)}(0) + \sqrt{2n+1}\, \varphi_{2n}(0)$$

bzw.

A9-3 $$\varphi_{2n}^2(0) = \varphi_0^2(0) \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$$

$$= \varphi_0^2(0) \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdot \ldots \cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} (-1)^n$$

$$= \varphi_0^2(0) \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n$$

Daraus folgt

A9-4 $$G(0) = \varphi_0^2(0) \cdot e^{-\omega T} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-e^{-4\omega T}\right)^n$$

$$= \frac{\varphi_0^2(0) \cdot e^{-\omega T}}{\sqrt{1 - e^{-4\omega T}}} = \frac{\varphi_0^2}{\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,2\omega T}} \,.$$

Die Normierung der Grundzustandswellenfunktion entnehmen wir ebenfalls [6] und erhalten so für G(0)

A9-5 $$G(0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\,\mathrm{sh}\,2\omega T}} \,.$$

Literaturangaben

[1] *H.G.Dosch* und *Yu.A.Simonov*, DESY-Preprint 89-071

[2] *R.P.Feynman* und *A.R.Hibbs*, Quantum Mechanics and Path Integrals, New York 1965

[3] *F.Riesz* und *B.S.Nagy*, Vorlesungen über Funktionalanalysis, Berlin 1956

[4] *F.Constantinescu*, Distributionen und ihre Anwendungen in der Physik, Stuttgart 1974

[5] *I.N.Bronstein* und *K.A.Semendjajev*, Taschenbuch der Mathematik, Thun 1984

[6] *A.Messiah*, Quantenmechanik, Band 1, Berlin 1976

Hierbei sind von besonderem Interesse

in [1]: Kapitel 2.

in [2]: Das Kapitel über Polaronen.

in [3]: Die Abschnitte über Integralgleichungen, insbesondere solche mit vollstetigen Integralkernen.

in [4]: Allgemein zur Einführung.

in [5]: Abschnitt 4.4.1.1. .

in [6]: Anhang B.3.2 .

Konventionen und Symbole

Gemäß der Konvention, die wir hier verwenden, erstrecken sich Integrale ohne Angabe des Integrationsbereichs über die gesamte reelle Achse. Die Summen ohne Angabe des Summationsbereichs laufen über die ganzen Zahlen, wobei Konvergenz der Summe nur dann vorliegt, wenn beide Teilsummen über die positiven bzw. die negativen Zahlen im üblichen Sinn konvergieren.

$$\mathcal{K}(c) = \frac{\partial \ln G}{\partial c}(c) \quad , \quad k(v) = \frac{\partial}{\partial v} \ln G(c(v))$$

$$v(c) = \frac{1}{2}|\Omega^2 - \omega^2| - \sqrt{\frac{1}{4}(\Omega^2 - \omega^2)^2 - \frac{2\Omega c}{m}}$$

$$V_\pm = \sqrt{\frac{1}{2}(\Omega^2 + \omega^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\Omega^2 - \omega^2)^2 - \frac{2\Omega c}{m}}}$$

$$V_\pm(v) = \sqrt{\frac{1}{2}(\Omega^2 + \omega^2) \pm \frac{1}{2}|\Omega^2 - \omega^2| \mp v}$$

$$g_\tau(t) = g(t-\tau)$$

$$g_m(\tau) = [g_\tau(t)]_m$$

$$\Lambda_\pm = \Omega + v_\pm \operatorname{th} v_\pm T$$

$$M_\pm = \Omega + v_\pm \operatorname{cth} v_\pm T$$

$$\Lambda = \Lambda_- (v_+^2 - \Omega^2) - \Lambda_+ (v_-^2 - \Omega^2)$$

$$M = M_- (v_+^2 - \Omega^2) - M_+ (v_-^2 - \Omega^2)$$

$$(x \quad L \quad y)$$

„Ket" - Vektor y_m

linearer Operator L_{lm}

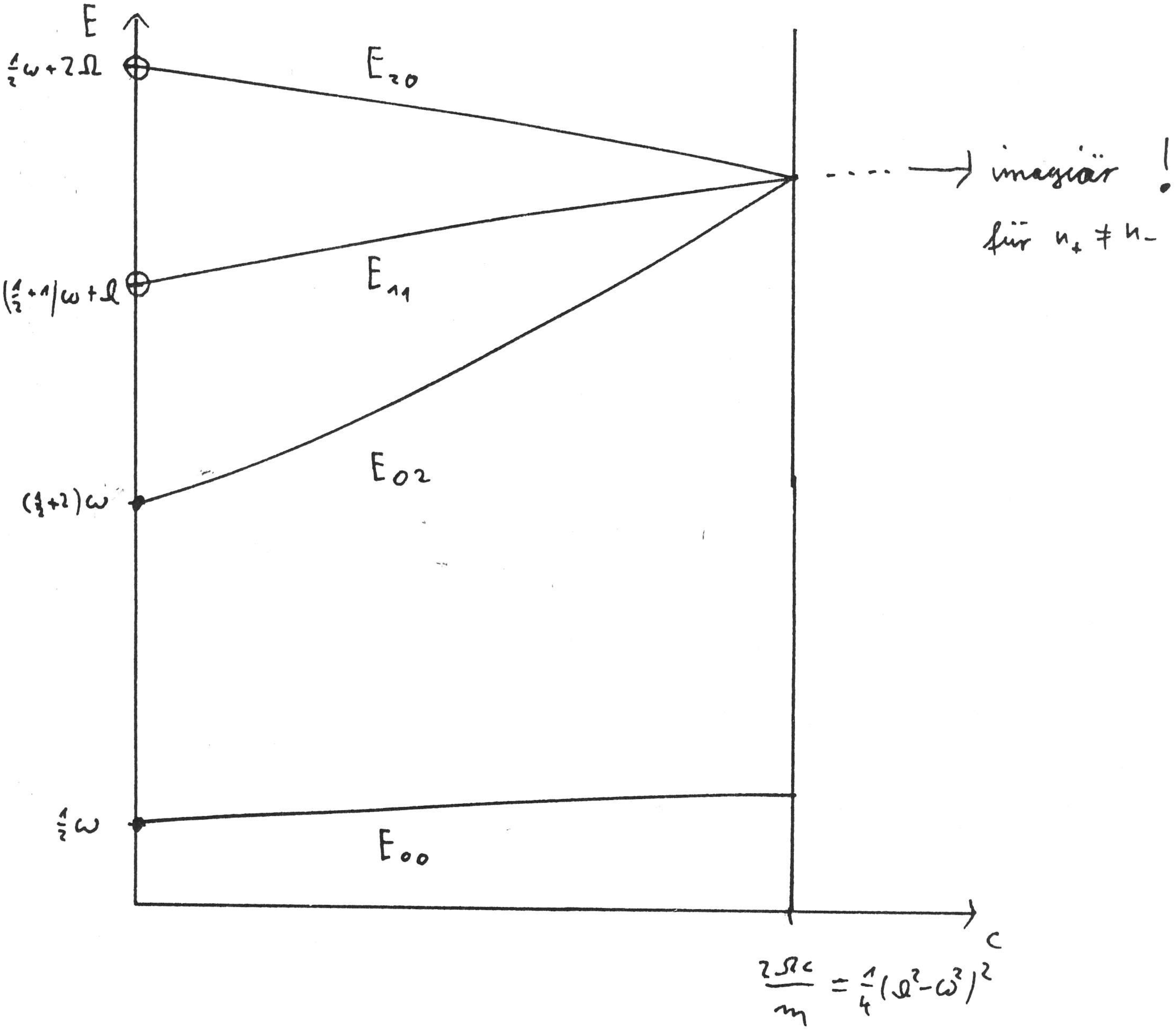
„Bra" - Vektor x_l

Also: $(x L y) = \sum_{l,m} x_l L_{lm} y_m$

insbesondere $(x \mathcal{D} y) = \sum_l \left[x_l \left(\sum_{n=0}^{\infty} D_l^n \right) y_l \right]$

und $(e \, \ldots .)(t) \hat{=} \sum_l e^{il\pi \frac{t}{T}} \ldots . \, .$

Dyadisches Produkt: $\left[x)(y \right]_{lm} = x_l y_m$



Die unteren Werte des Spektrums (qualitativ) für $\Omega > \omega$

Für die Überlassung des Themas, sowie für die angenehme Betreuung möchte ich mich bei Herrn Prof. *H.G. Dosch* herzlich bedanken.